

УДК 519.83

Теория игр: от анализа к синтезу. Обзор результатов

А. П. Горяшко

НОУ ВПО Московский технологический институт «ВТУ»
119334, Москва, Ленинский проспект, д. 38а
e-mail: petrovich4you@gmail.com

Аннотация. Настоящий обзор посвящен наиболее интригующим результатам математической теории игр, полученным, в основном, в последние десять лет. Это результаты, которые объясняют, как происходит взаимодействие большого числа лиц с различными интересами (так называемые некоалиционные или некооперативные игры) в современных глобальных технических системах, таких, например, как Интернет. В частности, одним из самых важных результатов следует считать то, что в таких системах общее благо часто достижимо без вмешательства единого органа управления («диктатора»). В обзоре также упомянут ряд существенных результатов последних лет, относящихся к относительно новому разделу теории, а именно к проектированию рынков, разделу, где впервые были получены результаты решения важных практических задач экономики.

Ключевые слова: некоалиционные игры, равновесие по Нэшу, алгоритмическая теория игр, дизайн механизмов, анализ конкурентоспособности, игры Блотто, цена анархии, цена стабильности.

ГРНТИ 28.29.05

Введение

Предлагаемый вниманию читателей обзор ни в коей мере не может претендовать на сколько-нибудь полное описание сегодняшнего состояния дел в теории игр. Достаточно заметить, что в книге «Алгоритмическая теория игр» [1], увидевшей свет в 2007 году, в 29 главах, на 750 страницах рассмотрены лишь наиболее интересные, с точки зрения теории сложности вычислений, задачи теории игр.

Алгоритмический подход к теоретико-игровой проблематике сегодня стал (заслуженно) чрезвычайно популярным. Но он не исчерпывает все многообразие проблем теории игр и авторы «Алгоритмической теории игр» лишь вкратце упомянули некоторые важные прикладные направления, например, *matching problems* и результаты работ А. Рота, за которые в 2012 г. он (вместе с Л. Шепли) был удостоен

Нобелевской премии по экономике или вовсе умолчали о таких направлениях, как, например, «игры полковника Блотто», переживающие сегодня второе рождение.

Задача автора настоящего обзора была скромна — среди огромного многообразия направлений выделить наиболее интересные и заведомо перспективные с прикладной точки зрения методы и результаты. Очевидно, решение подобной задачи может быть только субъективным, основанным на предыдущем опыте и предпочтениях выбирающего. В данном случае основную роль сыграли давние занятия автора обзора в области синтеза логических схем и автоматов. В этой области впечатляюще проявилась возможность принципиального уменьшения трудоемкости решения задачи за счет изменения постановки. Так, например, задача синтеза минимального обнаруживающего теста для достаточно общего класса неисправностей в заданной схеме, реализующей произвольный ограниченно-детерминированный оператор, является NP-полной. Но стоит позволить проектировщику выбирать метод синтеза схемы, реализующей тот же оператор, как у него появляется возможность — ценой небольшой избыточности — уменьшить трудоемкость задачи синтеза теста (в том же классе неисправностей) до константы. И здесь нет ничего сверхъестественного. По такому пути шли люди на протяжении всей истории цивилизации: когда задача представлялась неразрешимой, они находили способ взглянуть на нее «с другой стороны»: иначе говоря, меняли метод синтеза.

Потому для автора обзора наиболее близкими направлениями в современной теории игр оказались *design mechanisms* и *market design*. В них выявлен главный тренд последних десятилетий развития теории игр: переход от анализа процессов взаимодействия людей (зачастую вызывающий сомнение в разумности рода человеческого) к синтезу правил поведения, обеспечивающих (в идеале) построение нового, прекрасного мира игры.

Обзор построен следующим образом.

В первом разделе «О некоторых методологических проблемах в теории игр» очень бегло упомянуты те предположения классических работ теории игр, которые, позволив получить общие результаты, заметно ограничили возможности применения методов теории к решению практически интересных задач. Эти проблемы, с одной стороны, имели чисто алгоритмическую природу (трудоемкость методов нахождения равновесия в некоалиционных играх), с другой — были принципиального характера, например, отсутствие равновесия в чистых стратегиях. Попытки преодолеть перечисленные трудности как раз и привели к созданию многих новых, перспективных направлений, в частности синтеза механизма игры.

Второй раздел «Синтез как новая парадигма теории игр» посвящен, во-первых, рассмотрению основной идеологии синтеза механизмов (на примере аукционной торговли), и во-вторых, примерам того, насколько уместна методология этого подхода оказалась при рассмотрении тех новых классов задач, которые инициированы эрой Интернет-технологий.

В третьем разделе «Синтез сети как игра» сделана попытка объяснить, почему методология синтеза механизма может стать основой новых направлений в самом широком спектре научных исследований, от общественных наук, таких как полито-

логия, социология и вплоть до биологических, изучающих поведение в коллективах живых существ. Понятия «цены анархии» и «цены стабильности», возможно, станут в дальнейшем основными понятиями в теориях, которые объяснят, как муравьям или термитам без предварительных планов, иерархии начальников и даже отсутствия сколько-нибудь сложных механизмов общения удается строить циклопические (учитывая их собственные размеры) и исправно функционирующие жилища с системами вентиляции.

Приведенные в этом разделе результаты, связанные в основном с изучением сетей Шепли, далеко не исчерпывают многообразие будущих исследований. Кстати говоря, синтез игры, это еще и способ обмануть соперника (если читатели помнят перипетии гоголевских игроков, то согласятся, что это подходящий пример выбора эффективной стратегии синтеза игры). Единственное, что мешает подобным приемам удостоиться упоминания в теории игр, это принципиальное отсутствие общности стратегий обмана. Хотя не исключено, что одним из направлений будущего изучения в теории игр станет синтез эвристических методов выбора стратегий игры, зависящих от генотипа противника.

Четвертый раздел «Задачи offline и online и синтез механизмов игры» посвящен еще одному «алгоритмическому» направлению в теории игр, начало которому было положено полстолетия назад решением математической «проблемы остановки». За эти годы формальная задача теории вероятностей приобрела облик прикладного исследования того, весьма многочисленного, класса проблем, в которых решение приходится принимать «на ходу», используя последовательно поступающую информацию от источника, вероятностные параметры которого практически неизвестны. По сути дела, это новый раздел робастных вычислений, в котором ищут оптимальные алгоритмы (точнее, *s-конкурентоспособные*) в случае весьма ограниченной информации о происходящих событиях, даже не пытаясь задавать вид вероятностных распределений источника информации. (В этом смысле подобный подход напоминает идеологию работ по методам робастной оптимизации [4]).

Завершает этот раздел формулировка результата относительно наличия *s-конкурентоспособного* алгоритма для игры полковника Блотто. Результат показывает, какой информацией о противнике достаточно располагать, чтобы *гарантировать* победу в чистых стратегиях.

Заключительные замечания посвящены, в первую очередь, короткому рассказу о перспективах направления по имени «проектирование рынков». Хотя эти работы не были разобраны в обзоре, но их нельзя не упомянуть уже хотя бы потому, что они больше чем какие-либо другие доказывают вступление теории игр в эпоху зрелости.

1. О некоторых методологических проблемах в теории игр

Классические работы математической теории игр Дж. Неймана [22] и Дж. Нэша [21] вызвали не только понятный интерес в математической среде, но и

энтузиазм в среде экономистов — в первую очередь, тех, кого в 60-е гг. прошлого века стали называть специалистами в математической экономике.

Напомню содержательную сторону основных результатов Дж. Неймана и Дж. Нэша.

Дж. Нейманом показано, что любая антагонистическая игра с постоянной суммой (в частности, нулевой) имеет решение (равновесие) в смешанных стратегиях. В частности, почти сразу же стало понятно, что это решение может быть получено как решение задачи линейного программирования (простое объяснение можно найти в [17], там же и ссылки на оригинальные работы).

Полученный результат означал, что антагонистическая игра с постоянной суммой является *tractable* проблемой (как это принято сегодня говорить), т. е. вычислительные трудности при решении таких проблем относительно невелики¹.

Дж. Нэш показал, что любая (точнее, выпуклая) некооперативная (некоалиционная) игра имеет, по крайней мере, одно равновесие в смешанных стратегиях — так называемое Нэш-равновесие (НР). Поиск этого равновесия *не сводится* к задаче линейного программирования, а впоследствии выяснилось, что эта задача в общем случае *untractable*.

Общность результатов Неймана и Нэша была впечатляющей, что, впрочем, не отменяло того обстоятельства, что практическое применение всей «игровой кухни» весьма проблематично. В то время как методы решения оптимальных задач (особенно задач линейного программирования) уже в 60-е гг. стали стандартным инструментом для практического использования в самых различных областях — труднее назвать такую область, где бы они не применялись, задачи теории игр оставались, в лучшем случае, инструментом моделирования самых простых экономических ситуаций, помогая экономистам высказывать некоторые гипотезы, численная проверка которых, как правило, была невозможна.

В чем же основная причина столь скромных успехов теории игр на практическом поприще? Казалось бы, теория «игры» много ближе человеку, чем решение условных экстремальных задач и потому легко найдет себе применение в его практической деятельности. Но именно эта «близость» оказалась основным препятствием: было очень непросто рассмотреть такие классы задач, которые, с одной стороны, были бы практически интересны, а с другой — могли быть описаны достаточно общей, да еще и вычислительно доступной математической моделью.

Комментарий. Оценить перспективность того или иного результата в потоке работ, последовавших за классическими результатами, никто даже не пытался. Лишь в конце прошлого столетия и первое десятилетие нынешнего стало понятно, сколь плодотворными оказались некоторые из работ 60-х–70-х гг. Свидетельством тому стало и присуждение Нобелевских премий по экономике Ауману, Гурвицу,

¹ Точное доказательство того, что для решения задач ЛП существует полиномиальный алгоритм, было получено лишь в 1980 г. Л. Г. Хачияном, а в 1982 г. Д. Б. Юдин, А. С. Немировский и Л. Г. Хачиян стали лауреатами премии Фалкersonа за метод эллипсоидов в линейном программировании.

Гейлу и ряду других ученых за результаты, полученные еще в середине прошлого века.

Но почему в течение нескольких десятилетий математическая теория игр производила на практиков впечатление чисто математических штудий. Тому было несколько объективных причин. Укажем, на наш взгляд, основные.

Проблема 1. Динамический характер игр. Классические постановки рассматривали так называемую *one shot* модель: однократное взаимодействие игроков. Достаточно очевидно, что такая модель не является хорошим приближением к реальности. А дальнейшие исследования сразу же установили, что модели повторяющихся игр имеют существенно более сложный вычислительный характер.

Проблема 2. Предположение о полной и совершенной информации. Хотя для антагонистических игр с нулевой суммой это предположение могло быть не столь ограничивающим — было показано существование достаточно точных приближенных методов решения — в общем случае, неточное знание платежной матрицы не позволяло получать сколько-нибудь общие результаты о решениях. Понятно, что в любых реальных условиях говорить о том, что игроки имеют точное представление о платежах оппонентов, было бы большой натяжкой. Заметим, что байесовский подход (представление о равновесии Байеса-Нэша), когда знание о игроках выясняется в процессе игры, технически неприемлемо сложен и не применим в сколько-нибудь нетривиальных случаях.

Проблема 3. Предположение о смешанных стратегиях — краеугольный камень классической теории игр. Но то, что имеет смысл в статистических задачах, таких, например, как контроль качества, совершенно не годится в подавляющем большинстве ситуаций, которые описывают взаимодействия людей. Конечно, для всего можно отыскать пример: скажем, владельца магазина или ресторана интересует средний чек за месяц и в своих «играх» с покупателями он может рассчитывать на то, что реализация «смешанной стратегии» является осмысленной политикой. Но в конкурентной среде, где покупатель всегда имеет возможность *сменить* продавца, разорение может наступить раньше, нежели равновесие. Потому вопросы о возможности получения равновесия в чистых стратегиях для некоалиционных игр и о «качестве» такого равновесия становятся первостепенными, а решить их оказалось очень непросто.

Проблема 4. Это проблема того, насколько понятия «равновесие» и «решение» в теории игр можно полагать синонимами. Если этот вопрос не возникает в антагонистических играх, то уже в некоалиционных играх Нэша от него невозможно отмахнуться. Дело в том, что в самых простых моделях игр возможно существование множества (в принципе, бесконечного) Нэш-равновесий, и почти все такие равновесия с точки зрения здравого смысла — или эффективности по Парето — могут быть абсолютно вздорными.

Проблемы, перечисленные выше, чрезвычайно активизировали исследования в области теории игр. Были не только получены новые интересные результаты — произошло много *большее*. Сформировался ряд новых (и произошел возврат к забытым старым) направлений исследований, причем оказалось, что постиндустри-

альное общество вообще и, в частности, интернет-технологии последнего десятилетия становятся поставщиком совершенно новых моделей игр. Сегодня уже проглядывают контуры *практического* применения результатов теории и понимания реальной важности развития математической теории игр в жизненно важных для информационного общества вопросах.

Ограниченный объем обзора не позволяет представить сколько-нибудь полную картину происходящего в теории игр. Насколько нам известно, наиболее подробный разбор почти всего, что происходит сегодня в теории игр, можно найти в работе «Алгоритмическая теория игр» [1]. Здесь же будет рассказано о наиболее интересном, с точки зрения практика, направлении — дизайн механизма (*mechanism design*) — а также отмечены исследования, которые, по мнению автора, станут востребованными в ближайшие годы.

2. Синтез как новая парадигма теории игр

Мнение о том, что продвижение во всех, упомянутых выше проблемах теории игр, может быть обеспечено «всего лишь» сменой основной парадигмы теории, существовало чуть ли не с самых первых лет появления этой теории. Уже в начале шестидесятых появились работы о том, как *следует* проводить аукционы [30] — прежде других, работа В. Викри, а затем в 1972 г. была опубликована работа Л. Гурвица [14], в которой собственно и был предложен термин *mechanism design*. В 1996 г. В. Викри и Дж. Мирлес были удостоены Нобелевской премии по экономике, а в 2007 г. этой же чести были удостоены Л. Гурвиц, Э. Маскин и Р. Майерсон. Присуждение премии 2007 г. сопровождалось уже формулировкой за «*foundations of mechanism design theory*».

Таким образом, хотя идея перейти от анализа произвольной игры к синтезу «хороших» по структуре игр была как будто бы очевидна, превращение ее в полноценное научное направление потребовало серьезных усилий и времени. Зато и результаты оказались обнадеживающими.

2.1. Аукцион второй цены

Общеизвестна распространенность аукционной торговли: от торговли цветами до торговли радиочастотами. Очевидно, каждый участник аукционной торговли (как и любой другой торговли) стремится, во-первых, осуществить выгодную сделку и, во-вторых, к тому, чтобы результат был, по *его* мнению, справедлив. Поскольку все хотят справедливости², желательно понять, как ее добиться в условиях, когда каждый склонен понимать ее по-своему.

² В теории игр существует целый класс игр (наиболее известны игры «диктатор», «ультиматум»), анализ которых позволил многое понять о том, как люди представляют себе «справедливость». Ожидаемый результат этих исследований — понятия «справедливость» и «рациональное решение» имеют мало общего.

Определим вначале понятие «общественное благо», применительно к общей задаче выбора (это может быть выбор президента, выбор автомобиля в магазине и т. п.). Формально говоря, принято рассматривать множество альтернатив A и множество участников I , состоящее из N элементов, а также множество L линейных порядков на A . Каждая упорядоченность из L является антисимметричной и транзитивной.

Определение. 1. Функция

$$F : L^N \rightarrow L$$

называется функцией общественного блага (*social welfare*).

2. Функция

$$F : L^N \rightarrow A$$

называется функцией общественного выбора (*social choice*).

Таким образом, функция общественного блага агрегирует предпочтения *всех* участников в *общее* предпочтение. В случае голосования это означает общественное предпочтение упорядоченности для всех кандидатов, а функция общественного выбора — предпочтения всех голосующих в выборе единственного кандидата.

Напомним, что, в соответствии со знаменитой «теоремой невозможности» Эрроу [2], любая функция общественного блага, которая удовлетворяет условиям единогласия и независимости от нерелевантных альтернатив, при условии, что $|A| \geq 3$, оказывается *диктаторской*.

Однако нас, прежде всего, будет интересовать реализация функции общественного блага не с позиций настройки механизмов голосования, а с экономической точки зрения, как формальное обоснование той самой «невидимой руки рынка», которую провозгласил еще в середине XVIII века Адам Смит. Как неоднократно отмечалось, теория дизайна механизма как раз и предъявляет *доказательства* того, что, несмотря на эгоистические интересы и неполноту информации участников рынка, функция общественного блага в экономике *достижима*.

Рассмотрение этих доказательств начнем с изучения, так называемого аукциона второй цены или аукциона Викри. Для того чтобы была ясна логика аукционной торговли и предложение Викри, придется несколько подробнее рассмотреть поведение участников любого процесса торговли и, в частности, торгового аукциона.

Задача о торговле (*bargaining*) была одной из первых, рассмотренных Нэшем в его, ставшей уже классикой, работе [21]. С тех пор ситуацию любого торга принято описывать следующим образом. Пусть продавец S (*seller*) хочет продать некоторую вещь, которую он *оценивает* как $v_s \in [0, N]$ и *просит* за нее $s \in [0, N]$. Покупатель B (*buyer*) *оценивает* эту вещь как $v_b \in [0, N]$ и согласен заплатить за нее $b \in [0, N]$. S и B *одновременно* называют свои цены. (Одновременность является существенным обстоятельством, хотя во многих случаях рыночной торговли это условие не выполняется.) Для теории, цель которой найти равновесные стратегии, существенно, чтобы оба участника были *одинаково информированы*. Для рассматриваемого

процесса торговли это означает отсутствие информации о намерениях партнера³. Сделка состоится тогда и только тогда, когда $b \geq s$, и в этом случае каждый получает $\rho = (b+s)/2$ денежных единиц. Тогда полезность сделки U_s для продавца равна $\rho - v_s$, а полезность сделки U_b для покупателя: $v_b - \rho$.

Теперь рассмотрим частный, но широко распространенный способ торговли — так называемую аукционную торговлю. Причина повышенного внимания теории игр к этому виду торговли объясняется точно заданными правилами проведения аукционов, что делает их более благодарным объектом для получения формальных результатов.

Лучше всего известен *аукцион с повышением цены*, так называемый английский аукцион. По правилам английского аукциона проходят, например, аукционные торги предметами искусства. На таких аукционах, аукционист объявляет начальную цену. Затем любой участник торгов в аукционном зале может предложить большую цену (минимальный шаг изменения цены задан заранее). Торговля заканчивается, когда никто не может предложить цену больше той, которая была предложена последней. Победитель платит аукционисту максимальную цену. Если никто не пожелает поднять стартовую цену, предмет снимается с торгов.

Один из главных недостатков такого аукциона — его открытость, вследствие чего тем, кто находится в зале аукционной торговли, известно от кого поступает очередное предложение, что может быть существенной информацией. Кроме того, открытые аукционы допускают возможность различных махинаций с ценами, в результате которых игрока, стремящегося к выигрышу, вынуждают поднимать цену.

Кардинальный способ борьбы с этими недостатками предоставляет *закрытый аукцион*. Участники торгов подают аукционисту запечатанные конверты с указанием цены, которую они готовы заплатить. Аукционист рассматривает заявки и объявляет победителя и сумму, которую тот должен заплатить. Но какой будет эта сумма? Справедливо ли платить максимальную сумму?

В соответствии со здравым смыслом, справедливой ситуация торга может быть лишь в том случае, когда торгуемый предмет получает тот, чья собственная *оценка* этого предмета максимальна. А добиться этого (в процессе аукционной торговли) можно лишь в том случае, когда каждому участнику *выгодно* указывать свою *истинную оценку* торгуемого предмета⁴. Необходимым условием для этого является закрытость аукциона — каждый участник *не должен* знать оценок других участников. Почему?

³ Но именно отсутствие информации у игроков (покупателей и продавца) о том, как остальные участники сделки на самом деле оценивают предмет сделки, делает торговлю одной из самых увлекательных игр.

⁴ Многократно доказано в истории, что обеспечить выполнение любых правил (в особенности в экономике) практически невозможно, если тем, кто должен их выполнять, это будет невыгодно. Даже религиозные законы работают только в случае, когда человек полагает их исполнение в определенном смысле «выгодным» — другое дело, что эта «выгода» не имеет материального эквивалента и для посторонних может выглядеть нелепо.

Логично исходить из того, что ни у одного из участников *нет истинной* оценки стоимости продаваемого предмета, но зато каждый имеет *собственную* оценку его стоимости. Будем полагать, что каждый участник точно знает, чему равна максимальная цена, которую он согласен заплатить (иными словами, когда он перестанет участвовать в торгах, потому что не захочет повышать цену).

Закрытый аукцион позволяет обеспечить информационное «равенство» всех участников: никто не может получить дополнительную информацию, глядя на поведение остальных и, выбирая стратегию поведения, должен исходить исключительно из собственной оценки стоимости торгуемого предмета.

Закрытость аукциона является необходимым, но не достаточным условием. Правила проведения аукциона должны быть таковы, чтобы всем участникам было *выгодно* писать в заявке именно ту цену, которую, по их мнению, стоит торгуемый предмет.

Оказалось, что это может обеспечить *аукцион второй цены*: такие правила, при которых выигрывает участник, предложивший *максимальную* цену, но платит он аукционеру вторую цену, т. е. предыдущую предложенную цену.

Объясняется это следующим образом. Поскольку ни один из покупателей не знает истинной цены торгуемого предмета, выгодность покупки для него равна разности между *его оценкой* и той ценой, которую он *реально платит*. Иначе говоря, если покупатель i заявил в качестве цены свою *истинную* оценку v_i и победил (заявленное значение v_i оказалось максимальным), то *полезность* выигрыша будет для него равна $v_i - b^* > 0$, где b^* — максимальная цена среди всех цен, заявленных остальными игроками. Если же он будет платить заявленное значение v_i , то полезность покупки для него станет равной нулю. С другой стороны, если он (на всякий случай) заявит цену $v_i^* > v_i$, то все равно выиграет, но величина *полезности* для него ничуть не изменится — она ведь определяется *его истинной оценкой* v_i , а не заявленной ценой. Очевидно, для всех остальных игроков полезность будет равна нулю.

Поскольку это рассуждение справедливо для любого игрока, участвующего в аукционе, закрытый аукцион *второй* цены сподвигает всех игроков заявлять свою истинную оценку. Тем самым достигается желаемое *равновесие*: каждый игрок действует в соответствии со своими эгоистическими интересами и получает справедливое вознаграждение. (Мы оставляем без внимания частный случай, когда несколько игроков заявили одинаковую максимальную цену; в этом случае выигрыш назначается с помощью жребия, что не меняет представления о справедливости полученного результата.)

Комментарий. Выше неявно предполагалось, что все участники аукциона нейтральны по отношению к риску, т. е. для них безразлично получить 1 единицу полезности наверняка или две единицы полезности с вероятностью $1/2$. Фактически, большая часть покупателей являются *risk-averse*, т. е. в вероятностной игре они будут участвовать только если ожидаемый выигрыш много больше гарантированного

выигрыша. Известно, что если все участники аукциона оказываются *risk-averse*, выручка аукциона первой цены выше, чем аукциона второй цены [20].

Но ведь в аукционе участвует еще и продавец, и дизайн механизма аукциона не может не учитывать «справедливость» аукциона по отношению к продавцу, которому совсем не безразлична полученная полезность. Поэтому дизайн механизма аукциона не обошел вниманием интересы продавца. Еще до появления всякой теории, аукционисты защищали свои интересы, вводя так называемую *резервационную цену*. Если победитель аукциона должен был заплатить меньше какой-то величины r , аукционист имел право снять вещь с аукциона. Величина r как раз и называлась резервационной ценой. Теория дизайна механизма аукциона позволила проанализировать, как именно следует выбирать резервационную цену, чтобы оптимизировать доход продавца. Ведь совершенно ясно, что слишком большое значение r уменьшит вероятность продажи, а слишком малое будет невыгодно аукционисту.

Рассмотрим простейшую ситуацию: два покупателя с заявками b_1 и b_2 и резервационная цена r . Какие здесь могут быть варианты?

Если $b_1 \leq b_2 < r$, то предмет снимается с аукциона.

Если $b_1 < r \leq b_2$, то второй покупатель приобретает предмет по цене r .

И, наконец, если $r < b_1 \leq b_2$, то второй покупатель приобретает предмет по цене b_1 .

Для того чтобы сказать нечто определенное о наилучшем выборе величины r , сделаем следующие уточнения: все цены принадлежат непрерывному интервалу $[0, 1]$ (денежная единица безгранично делима), в аукционе участвует N покупателей и всем покупателям выгодно указывать свою истинную оценку торгуемого предмета. Оказывается, что оптимальная резервационная цена — такая, которая принесет максимальный доход продавцу — находится в точности посередине интервала цен, т. е. $r^* = 1/2$. В этом случае максимальный доход R продавца определяется как

$$R = (N - 1) / (N + 1) + \varepsilon(N),$$

где $\varepsilon(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, причем экспоненциально быстро.

К числу неочевидных результатов можно отнести тот факт [7], что, в общем случае распределения оценок покупателей в интервале $[0, 1]$, увеличение числа покупателей на одного даст для продавца больший эффект, чем введение резервной цены.

Впечатляющим примером того, как различные правила аукционов могут сказаться на результатах, приведены в работе Клемперера [16]. В 2000–2001 гг. в девяти европейских странах прошли государственные аукционы по продаже частот на мобильную связь третьего поколения. Покупателями в этих аукционах были операторы мобильной связи, а продавцами — государства. Выручки, полученные в различных государствах, отличались разительно: выручка на одного потенциального абонента в Великобритании составляла 650 евро, в Швейцарии — 20 евро. Общие поступления в бюджет этих стран отличались более чем в 10 раз.

Автор работы, который консультировал организаторов аукциона в Великобритании, отмечал два наиболее важных элемента, которые следовало учесть организаторам. Первый — число покупателей. Чтобы их было больше, правила аукциона должны давать шансы на победу «слабым» покупателям. Иначе они вообще не примут решение об участии в аукционе, а это снизит конкуренцию для «сильных» игроков. Второй — правила аукциона должны затруднять возможность сговора между покупателями; т. е. аукцион должен проводиться так, чтобы покупатели не могли подавать своими заявками сигналы другим покупателям. Например, при наличии возможности приобретения одного лота одновременно несколькими покупателями, они могут продемонстрировать, за какой лот они готовы торговаться, а за какой — нет (если проводится открытый аукцион).

Отмечалось, что организаторы аукциона в Швейцарии допустили роковую ошибку, разрешив совместные заявки со стороны нескольких фирм. В результате совместных заявок число претендентов сократилось с 9 до 4, при наличии всего 4 лицензий! В итоге все лоты ушли по очень низкой резервационной цене.

2.2. Как купить путь в сети

Поиск справедливых правил в аукционной игре был напрашивающимся направлением, потому здесь и появились первые работы, которые с полным основанием можно отнести к синтезу механизма или синтеза рынка. Менее очевидным стало направление, в котором рассматривалось игровое взаимодействие в процессе некоторой совместной деятельности. Неформально говоря, проблема заключалась в следующем: некоторая группа «игроков» занята некоторой деятельностью, причем эффективность выбранной каждым игроком стратегии (доход, который принесет его деятельность) как-то зависит от того, что делают остальные. Все «игроки» чрезвычайные индивидуалисты и не согласны тратить свои ресурсы на поиски наилучшей кооперативной стратегии. Можно ли в таких условиях надеяться, что им всем удастся добиться в некотором точном смысле хорошего результата? Или, по крайней мере, результата не сильно отличающегося от оптимального? По существу это опять же вопрос о цене робастности вычислений, когда робастность предполагает отсутствие у каждого «игрока» детальной информации о деятельности и планах всех остальных «игроков». Как это не покажется удивительным, но оказалось, что во многих случаях взаимодействия исключительно эгоистичных «игроков» можно рассчитывать на положительные результаты. Для того чтобы это утверждение приобрело характер строгого результата, необходимо рассмотреть формальную модель взаимодействия «игроков».

Пусть некоторое количество игроков E объединяется для того, чтобы построить коммуникационную сеть передачи данных от пункта s до пункта t . Они действуют на свой страх и риск, не сговариваясь между собой и выстраивая свой маршрут от s к t . В результате появляется коммуникационная сеть, которую можно представить в виде ориентированного графа $G(N, E)$, где N — множество вершин графа (пункты s , t и промежуточные пункты, например, ретрансляторы), а E —

множество дуг графа (каналов связи). Владельцу канала связи (дуги e_{ij} между вершинами i и j) передача одной единицы объема сообщений по этому каналу стоит $c(e_{ij})$. В этой стоимости учтена и стоимость построения канала.

Любой потребитель услуг коммуникационной сети будет стараться минимизировать свои издержки, т. е. $\sum c(e_{ij})$, где суммирование происходит по всем выбранным дугам маршрута от вершины s до вершины t . Это значит, что он будет искать самый дешевый маршрут. Но где гарантия того, что владельцы указали свои истинные издержки? (Заметим, что эта ситуация в точности напоминает историю с ценами покупателей на аукционе.)

Задача дизайнера механизма ценообразования в этой сети будет состоять в создании такого алгоритма — так называемый побудительный механизм Викрея-Кларка-Гроуса — который вынудит (или, по крайней мере, стимулирует) владельцев сети указывать истинную цену своих издержек. Такой алгоритм существует и его основная особенность в том, что он поощряет дополнительным вознаграждением тех владельцев, которые предоставляют наиболее часто используемые (а значит наиболее дешевые) маршруты. Проще всего продемонстрировать работу такого алгоритма — его называют побудительно совместимым механизмом — на примере простой коммуникационной сети. На рис. 1 показана коммуникационная сеть с вершинами s, t, I_1, I_2 и пятью дугами указанной стоимости.

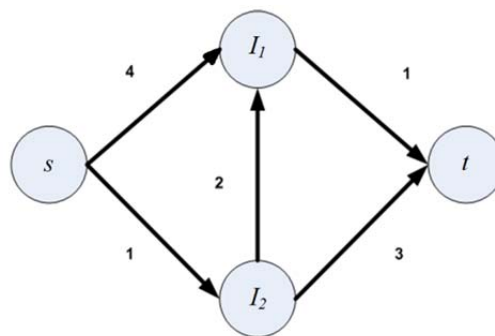


Рис. 1. Примере коммуникационной сети

Предположим, что владельцы указали истинную стоимость своих издержек. Легко заметить, что кратчайший маршрут sI_2t имеет стоимость $1 + 3 = 4$. Ясно, что пользователи будут ориентироваться лишь на этот маршрут и наш побудительный механизм будет платить лишь владельцам дуг (sI_2) и (I_2t) . Как минимум, они получат объявленную стоимость, но если их маршрут оказался дешевле всех альтернативных, они будут соответственно поощрены. Как определяется поощрение? Кратчайший путь st , который *не проходит* по дуге (sI_2) , это путь (I_1t) , стоимость

которого $4 + 1 = 5$. Поэтому владельцу (sI_2), в соответствии с побудительным механизмом, следует заплатить $1 + (5 - 4) = 2$. Кратчайший путь st , который *не проходит* по дуге (I_2t), это путь (sI_2I_1t), стоимость которого $1 + 2 + 1 = 4$. Поэтому владельцу (I_2t), в соответствии с побудительным механизмом, следует заплатить $3 + (4 - 4) = 3$. Было доказано, что такой способ ценообразования действительно стимулирует владельцев указывать истинную стоимость своих издержек.

2.3. Дизайн механизма социальных сетей

В 1999 г. в Интернете появился релиз системы *Napster*, в марте 2000 — системы *Gnutella*. Десятки миллионов людей получили возможность самоорганизовываться и обмениваться информацией: музыкальными произведениями, книгами и т. п.

Не прошло и полугодия после запуска системы *Gnutella*, как выяснилось, что не менее двух третей пользователей этой системы скачивают файлы, ничего не выкладывая взамен. Даже когда людям предоставили возможность делить всего лишь музыку или слова, они не смогли достичь такого «равновесия», когда большинство не старается «проехать зайцем».

Можно ли было ожидать иного? Этот вопрос незамедлительно приводит к следующему — а почему же не все стараются «проехать зайцем»?

Здесь необходимо вспомнить о результатах работ по итеративным, т. е. повторяющимся играм. В классических постановках теории игр повторяющиеся игры по сути дела не рассматривались вообще, ведь идея о смешанных стратегиях носит формально-статистический характер. Но уже в 70-ые гг. начинает активно исследоваться ситуация *стратегического равновесия* в играх, а именно такого равновесия, которое выгодно всем участвующим в игре. Объясняется это тем, что именно повторение игровых ситуаций может *вынудить* игроков играть *кооперативно*, т. е. с учетом не только собственных эгоистических интересов. Именно за цикл этих работ Р. Ауман и Т. Шеллинг в 2005 г. были удостоены Нобелевской премии по экономике.

Но если эти работы в основном опирались на исследование простых моделей итеративной игры двух лиц, то в XXI веке Интернет предоставил обширное поле исследований «суперигр», в которые играют десятки и сотни тысяч пользователей социальных сетей. Теперь уже не только таких систем, как *Napster* и *Gnutella*, но и множества файлообменных сетей типа *BitTorrent* и огромного количества сетей, обслуживающих Интернет-торговлю.

Появление Интернета как глобального способа обмена информацией кардинально изменило подходы к проектированию компьютерных архитектур. Наибольший интерес стала представлять система *peer-to-peer* (равное-к-равному), или $p2p$, в которой нет жестких структурных связей. Каждый элемент такой системы может *передавать* информацию любому другому (незанятому в этот момент) элементу или *получать* информацию от любого элемента.

До появления систем р2р техническая реализация интернет-соединений предполагала наличие *серверов* и *клиентов*. Клиенты посылали серверу запрос на соединение, сервер обрабатывал этот запрос и посылал его другому клиенту. Затем сервер возвращал ответ на запрос, который ему передал клиент. Ясно, что вычислительная мощность сервера должна быть много больше, чем у клиента.

В системе р2р *каждый* компьютер выполняет роль как сервера, так и клиента. Это, на первый взгляд, простое изменение структуры привело к кардинальному увеличению эффективности процессов обмена информацией, поскольку вычислительные ресурсы стали использоваться максимально полно. Сегодня на сети р2р приходится уже половина всего трафика Интернета, а создание сетей этого типа стало существенным продвижением в эволюции «информационного уравнения» людей. Широчайшее распространение сетей этого типа позволяет превратить их в действующую лабораторию по экспериментальному изучению работы механизмов поощрения кооперативного поведения.

Если представить пользователей сети р2р игроками, которые устанавливают связи (соединения) друг с другом, то основная стратегия их поведения может быть описана моделью однократной «дилеммы узника» (ДУ). Известно, что в таком случае доминантной стратегией является *некооперативное* поведение (в терминологии ДУ «обман»). Вынудить к кооперации в модели ДУ можно лишь в случае итеративной игры, прибегая к механизмам взаимных угроз, которые получили название «око за око» или *tit for tat*. Но общение игроков в сетях р2р больше похоже на *one-shot* модель, поскольку пользователи анонимны и могут рассчитывать на то, что их поведение сегодня не повлияет на отношение к ним завтра.

Опыты с файлообменными сетями, описанные в работе [3], свидетельствуют, что в сети из 120 пользователей уже к 400 раунду общения более 100 пользователей прибегали к стратегии «обманывать», не предоставляя другим своих ресурсов. Чем больше в сети пользователей, тем более явно прослеживается эта тенденция. Таким образом, доминантной стратегией становится «свободная езда» (*free riding*), когда игрок согласен загружаться, когда он «клиент», и отказывается в загрузке, когда он «сервер». Ясно, что достижение социальной справедливости невозможно без внедрения механизмов поощрения кооперации. Наиболее изученными и работающими оказались механизмы *репутации*, *бартерного обмена* и *денежного поощрения*.

Репутация. Репутационные механизмы прекрасно зарекомендовали себя как механизм, обеспечивающий кооперативное поведение в самых разных ситуациях от эволюционной биологии до онлайн-торговли. Неудивительна попытка их применения в любых системах р2р. Конкретных схем реализации этих механизмов множество, но общий принцип один: игрок, обладающий высокой репутацией, получает намного лучшие условия обслуживания от других игроков, нежели игрок с плохой (или отсутствующей) репутацией.

Конечно, для проявления репутационного эффекта должны выполняться определенные условия: игра должна повторяться, поскольку репутация не имеет *стратегической* ценности в одноразовой игре; ценность репутации для ее носителя должна быть больше, чем ценность того, чем он пожертвовал в любом раунде по-

вторяющейся игры. Из последнего следует, что игроки должны установить обязательства по *уменьшению* ценности в каждом раунде, так что искушение «обмануть» в каждом раунде никогда не стало достаточно высоким⁵. Нахождение оптимальных характеристик ценности репутации является нетривиальной задачей.

Наиболее серьезное внимание репутационным механизмам по необходимости пришлось уделять в системах электронной торговли (прежде всего, в *eBay*). Это и не удивительно, учитывая количество сделок, которое осуществляется в этой системе, анонимность продавцов и покупателей и широчайшие возможности обмана покупателей, которые неизбежно привлекают внимание кибермошенников. Поэтому репутация продавца (и покупателя) здесь чрезвычайно важна и созданию алгоритмов, позволяющих автоматически определять репутацию пользователей и динамически следить за ней, уделяется самое серьезное внимание. Разработка алгоритмов, которые позволяют по истории поведения пользователей в сети достоверно оценивать их репутацию, существенно затрудняется теми возможностями, которые предоставляет система р2р для противодействия любому слежению.

Основные способы противодействия построению достоверной репутационной системы состоят в следующем:

1. Отбеливание (*white washing*), когда пользователь меняет свой псевдоним и начинает жизнь «с чистого листа».
2. Неверная обратная связь, когда пользователь не устанавливает обратную связь или не честно отвечает на заданные вопросы.
3. Фантомная обратная связь, когда пользователь сообщает о взаимодействиях, которые никогда не имели места; при этом создаются фальшивые онлайн-личности, которые поддерживают и рекламируют репутацию истинной личности.

В результате таких атак на репутационные алгоритмы достоверность защиты с помощью оценки репутации может сильно снизиться, что заставляет искать новые механизмы защиты. Так, в р2р сетях происходит постоянная информационная война, в которой окончательная победа достижима лишь отказом от Интернет-услуг.

Бартер. Наиболее известный пример использования этого принципа демонстрирует известная сеть *BitTorrent*. Файлы, которыми обмениваются пользователи, разделяются на небольшие порции, каждая из которых может быть взята от разных пользователей и передана множеству других пользователей. В результате реализуется прямая взаимность — порция информации, полученная одним пользователем, может быть тут же передана другому без прямого участия каждого из них. (Заодно крайне сложно обвинить какого-то конкретного пользователя в нарушении авторских прав, поскольку вся информация ровным слоем «размазана» по миллионам пользователей и никто не передает целиком *все* произведение.) Подробное изучение протоколов сети *BitTorrent* выявило и в них такие возможности манипуляции, которые позволяют обходить механизмы бартерного обмена, так что вопрос о том,

⁵ Это довольно общая ситуация: например, участникам строительного проекта предпочтительно платить еженедельно или ежемесячно, чтобы у них не было соблазна уйти, получив значительную долю стоимости.

можно ли создать бартерную схему, свободную от манипуляций, остается открытым.

Валюта. В общем случае схема валютного поощрения выглядит просто: каждый *peer* зарабатывает какую-то валюту, вкладывая некий ресурс в систему и тратит валюту, получая некоторый ресурс. Так, в сети *Mojonation*⁶ пользователь зарабатывает *mojos*, вкладывая средства в других, и использует заработанную «валюту», чтобы получать некоторый сервис от другого пользователя. В подобных системах теория игр может помочь в определении таких параметров, как цена загрузки и разгрузки единицы информации и величиной дисконтирования для того, чтобы независимо действующие пользователи могли обеспечить в системе какое-то Нэш-равновесие [12].

2.4. Дилемма узника и Интернет-провайдеры

Уже упоминалось, что дилемма узника (ДУ) один из наиболее популярных примеров в теории игр, хотя ситуация, которую он описывает (единственное равновесие по Нэшу, которое не является оптимумом по Парето), нельзя назвать «типичной». Как бы то ни было, обойтись без этого примера в теории игр, кажется, еще не удавалось ни одному исследователю. Вот и в относительно новой области теории игр — игры маршрутизации при организации Интернет-трафика — этот пример оказался востребованным⁷.

Покажем, как ДУ может принять обличье Интернет-трафика. На рис. 2 изображены две области: область (ИП1) покрывает Интернет-провайдер 1, область (ИП2) — Интернет-провайдер 2. Эти провайдеры могут обмениваться трафиком только через точки C и S (так называемые *peering points*).

Пусть ИП1 должен послать сообщение из пункта s_1 в пункт t_1 , а ИП2 — из пункта s_2 в пункт t_2 , причем пункты t_1 и t_2 расположены очень близко к точке S . Эгоистическое поведение каждого игрока приводит к тому, что они оба посылают сообщения по самому короткому маршруту, который содержит одно ребро, переключая передачу длиной три единицы (три ребра) на партнера. В результате затраты каждого из провайдеров равны четырем единицам. Но, если бы они согласились действовать заодно, посылая сообщение через пункт соединения S , то каждый затратил только две единицы (расстояние от S до t_1 и t_2 настолько малы, что их можно считать равными 0).

На рис. 3 приведена платежная матрица для игроков ИП1 (выбирает столбцы) и ИП2 (выбирает строки). Здесь стратегия S_1 — эгоистическая, а S_2 — кооперативная.

⁶ Название взято из карточной игры *Illuminati* (1982), которая, в свою очередь, основана на известном романе R. A. Wilson и R. Shea *The Illuminatus! Trilogy* (1975).

⁷ Развитие информационных технологий в постиндустриальном обществе почему-то оказалось связано с необходимостью решения еще более изощренных «моральных» проблем, нежели классические проблемы и давно исследованные проблемы типа «воровать — не воровать».

Еще один пример того, как классические и давно исследованные модели теории игр, которые специально придумывались для иллюстрации некоторых теоретических положений, в эпоху информационных технологий приобрели новую жизнь.

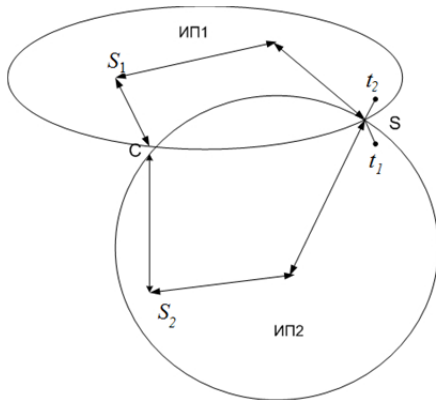


Рисунок 2. Диллема узника в задаче с Интернет-трафиком

–	S_1	S_2
S_1	4, 4	5, 1
S_2	1, 5	2, 2

Рисунок 3. Платежная матрица

В экономике и социологии давно известна проблема, получившая название «трагедия общин», после одноименной статьи специалиста по теории игр Г. Хардина в журнале Science. Содержательный смысл проблемы прост: коллектив «игроков», каждый из которых, эксплуатируя некое общественное благо, действует лишь в собственных интересах, приходит к ситуации полного уничтожения этого блага. Пример Г. Хардина: игроки — владельцы отар овец, которые пасутся на общественном пастбище. Поскольку каждый старается увеличить число овец в своей отаре, чтобы увеличить полезность, пастбище полностью истощается и полезность каждого становится равной нулю.

Вот как эта ситуация выглядит в наше время.

Пусть некоторое количество N игроков могут совместно использовать канал передачи данных заданной пропускной способности, равной 1. (Предполагается, что пропускная способность канала безгранично делима.) Стратегию игрока i обозначим через x_i ($x_i \in [0, 1]$), где x_i есть доля пропускной способности канала, которую занял игрок i .

Основное ограничение — естественное с точки зрения теории связи — состоит в том, что качество передачи информации по каналу *уменьшается* по мере загрузки канала. Если суммарная загрузка $\sum x_j > 1$, то ни один из игроков не может получить никакой пользы от этого канала (канал будет не доступен). Если $\sum x_j < 1$, то польза от передачи по каналу для игрока i будет равна $x_i(1 - \sum x_j)$. В самом деле, для любого игрока польза тем больше, чем большую долю канала он занимает, но, с другой стороны, эта польза уменьшается пропорционально общей загрузке ка-

нала. Как уже было замечено, польза для игрока i , полученная при передаче по каналу, определяется, как $U(x_i) = x_i(1 - x_i - t)$, где $t = \sum x_j$, а суммирование происходит по всем $j \neq i$ и $\sum x_j < 1$. Максимум функции $U(x_i)$ достигается, когда $x_i = (1 - t) / 2$.

Пусть все игроки играют свои оптимальные эгоистические стратегии при известных стратегиях остальных игроков (это будет стабильное множество стратегий). В нашем примере это значит, что каждый игрок i выберет долю пропускной способности, как $x_i = (1 - \sum_{j \neq i} x_j) / 2$. Существует только один способ это сделать: каждый игрок i из общего числа N игроков выбирает одинаковую долю пропускной способности канала $x_i = 1 / (N + 1)$.

Из предыдущего ясно, что польза для каждого игрока i , если он выбирает долю пропускной способности как $1 / (N + 1)$ будет равна $1 / (N + 1)^2$. Значит, суммарная польза для всех N игроков равна примерно $1 / N$. Иными словами, с ростом числа пользователей канала (игроков) суммарная польза от канала стремится к нулю.

Попробуем не жадничать, максимально используя канал. Если по каким-либо причинам нельзя директивно ограничить эгоизм участников, можно директивно уменьшить для них доступную пропускную способность, чтобы стремление каждого захватить большую часть пропускной способности канала не смогло существенно испортить качество канала. Установим, что *доступная* пользователям пропускная способность канала равна половине его истинной пропускной способности.

Что произойдет? Суммарная загрузка канала $\sum x_j = 0.5$, а польза от передачи по каналу для игрока i будет равна $0.5x_i$. Иными словами, нам удалось освободить полезность от второго сомножителя, который как раз и делал систему сильно связанной или, как мог бы сказать физик, самосогласованной системой, где каждый участник влияет на каждого.

Если теперь игроки будут, как и раньше, равномерно использовать канал, то доля пропускной способности канала для каждого из N игроков будет не $1 / N$ как раньше, а $0.5 / N$ (пропускная способность канала для всех игроков уменьшилась вдвое). В результате, суммарная польза канала будет равна $0.5 \cdot (0.5 / N) \cdot N = 0.25$, т. е. по сравнению с той ситуацией, когда каждый из N пользователей действовал, не обращая внимания на других, результат стал лучше примерно в $N / 4$ раза. Выигрыш будет тем значительней, чем больше число пользователей, а при $N \leq 4$ этот способ не дает выигрыша. Но при малом числе участников и проблемы обычно не возникает.

3. Синтез сети как игра

Одним из наиболее известных и важных направлений в *computer science* в прошлом веке был синтез логических сетей — основной теоретический инструмент

разработчиков вычислительных устройств и информационно-вычислительных систем. В определенном смысле это была классическая для математики область — решение условной оптимизационной задачи, в которой показателем качества являлись одни характеристики проектируемой сети (например, число элементов), а ограничениями — другие (например, быстродействие). Появление и развитие Интернета, нового типа компьютерных сетей, которые не создавались по *единому* плану *одним* коллективом разработчиков, полностью изменило представление о том, какие проблемы проектирования являются наиболее важными и как достичь эффективности структуры таких сетей.

Приблизительной аналогией изменений, которые инициировал переход от классических задач синтеза логических сетей к задачам синтеза распределенных сетей многими проектировщиками одновременно, можно считать задачи, возникающие перед человеком, намеренным построить дом в безлюдной местности, и задачи, возникающие перед группой людей, которые решают жить в одном поселке, но каждый в своем доме и со своими представлениями о желательности соседей, размерах участка для дома и т. п.

Понятно, что оценка распределенной сети типа Интернета, кроме традиционных мер сложности (стоимость, быстродействие), требует показателей качества, которые вообще не фигурировали в традиционных постановках задач синтеза логических сетей. Эти показатели качества призваны для того, чтобы:

- оценить насколько «сложнее» стала сеть, построенная различными проектировщиками, которые преследовали собственные интересы, по сравнению с сетью, построенной по единому плану;
- оценить, как синтезировать сеть, которая будет максимально соблюдать как интересы каждого проектировщика, так и интересы пользователей этих сетей.

Итак, построение распределенной сети Интернет естественно представить игровой моделью, с тем отличием от классических моделей типа «дилеммы узника», что ее размерность предъявляет уже совершенно иные требования к методам анализа.

3.1. Цена анархии и цена стабильности

Ранее уже мельком упоминалось, что в некоалиционных играх достижение *равновесия* (точнее, Нэш-равновесия) и достижение *эффективности* вовсе не одно и то же. В случае некоалиционной ДУ величины полезности игроков (значение игры), соответствующие единственному состоянию равновесия, могут быть сколь угодно меньше оптимальных значений (в смысле меры Парето), которые реализуются в некоторой неравновесной выходной ситуации. Потому мерой *эффективности равновесия* естественно полагать отношение суммарной полезности в состоянии равновесия к наилучшему значению суммарной полезности среди всех возможных исходов. Иными словами, насколько эгоистичное поведение в игре рацио-

нальных игроков приводит к результату, хуже того, который может быть (в принципе) получен при централизованном управлении⁸.

Конечно, еще одна немаловажная проблема — сколь сложным оказывается достижение равновесного состояния, т. е. сколько времени (числа шагов) необходимо для достижения равновесия и какова сложность алгоритма обучения этому процессу. Некоторые соображения по этому поводу будут приведены в конце раздела 3.

Наиболее часто в виде целевых функций исхода игры используются так называемые социальные цены, которые максимизируют или суммарные платежи *всех* игроков (*утилитарная* целевая функция), или платежи *каждого* игрока в отдельности (*эгалитарная* целевая функция). Заметим еще раз, что в Нэш-равновесии не реализуется оптимальный исход ни в случае утилитарной, ни в случае эгалитарной целевой функции. В играх типа дилеммы узника исход игры будет оптимальным только при координационном поведении игроков, а именно, когда игроки тем или иным образом смогут договориться о совместных действиях.

Для понимания того, что может дать координационное поведение, вводится два показателя: *цена анархии* и *цена стабильности*.

Цена анархии определяется как отношение между **худшим** значением целевой функции в одном из равновесий (напомним, что состояний равновесия может быть множество) и оптимальным значением целевой функции.

Цена стабильности определяется как отношение между **лучшим** значением целевой функции в одном из равновесий и оптимальным значением целевой функции.

Цена стабильности — мера, предназначенная для различения тех случаев, когда *все* равновесия неэффективны, и тех, когда только некоторые из них неэффективны. Очевидно, в игре с единственным равновесием цена анархии и цена стабильности совпадают.

Для изучения общего состояния дел наиболее интересны крайние случаи: когда цена анархии близка к 1 и когда цена анархии очень высока. В первом случае нет особой необходимости в наличии внешнего механизма «наведения порядка». Игроки сами могут достигнуть равновесия, при котором их платежи будут близки к оптимальным. Во втором случае — когда цена анархии велика — отсутствие внешнего механизма может дорого обойтись всем игрокам.

3.2. Игры локальной связности

Играми локальной связности принято называть игры на графах, где вершины графа это игроки, которые платят за дуги, которыми они напрямую (инцидентно) связаны с другими вершинами. Стратегия игрока — это выбор инцидентных вершин. При этом он сталкивается с двумя противоречивыми требованиями: желательностью минимизировать платежи и одновременно иметь как можно более ко-

⁸ Понятно, что в самом общем виде эта задача о том, насколько и в каких ситуациях сообщество людей не может обойтись без образования государства.

роткий путь до каждой вершины графа. Какова будет в таком случае цена стабильности, т. е. какова плата за равновесие в лучшем случае?

Подобные игры интенсивно изучались ранее в экономической литературе при моделировании формирования социальных отношений [15]. Сети локальной связности также могут быть моделями формирования сетей р2р, например, для соединения пользователей, обменивающихся файлами. Модели локальной связности были впервые ведены в [10], где представлены первые количественные результаты, относящиеся к стоимости создания стабильных сетей.

В моделях игр локальной связности игроки являются вершинами некоторой сети (графа) G с n вершинами, где каждый игрок идентифицируется с вершиной. Любая вершина u может принять решение о построении дуг, соединяющих ее с любым подмножеством вершин сети. Каждый игрок (вершина) преследует две взаимно противоречивых цели: поскольку построение дуг не бесплатно, он желает минимизировать число построенных дуг; с другой стороны, ему желательно иметь такую сеть, в которой расстояние от него до всех других вершин будет минимальным. Предположим, каждый игрок действует, исходя исключительно из собственных интересов. Насколько неэффективен будет результат построения такой сети?

Цена стабильности и анархии. Введем некоторые обозначения. Стратегией игрока u является множество тех дуг, исходящих из u , которые были построены этим игроком. Обозначим через S множество всех стратегий, выбранных n игроками, а через $G(S)$, получившийся в результате граф. Пусть, как обычно в теории графов, $\text{dist}_S(u, v)$ есть расстояние между вершинами u, v в графе $G(S)$, которое определяется как путь с минимальным числом дуг в этом графе, а если вершины u и v не соединены, то $\text{dist}_S(u, v) = \infty$. Каждый игрок, желающий заплатить минимум, хотел бы сделать расстояние до всех вершин минимальным.

Пусть стоимость построения одной дуги равна α . Тогда цель любого игрока u — минимизировать стоимость

$$C_u = \alpha n_u + \sum_v \text{dist}(u, v),$$

где n_u — число всех дуг, «купленных» игроком, а сумма берется по всем вершинам v сети, к которым он «купил» соединения, т. е. дуги. Предполагается, что все дуги не направлены, и поэтому, когда u купил дугу (u, v) , ее может использовать игрок v для связи с u . Процесс построения сети окажется в равновесии тогда и только тогда, когда сеть будет связна, т. е. каждая вершина будет соединена некоторым путем с любой другой вершиной сети. В противном случае, стоимость $C(G(S))$ будет равна бесконечности.

Назовем сеть $G(V, E)$ стабильной для величины α , если существует стабильный вектор стратегии S , который формирует эту сеть.

Социальная стоимость сети G определяется как

$$SC(G) = \sum_{u \neq v} \text{dist}(u, v) + \alpha |E|,$$

где $|E|$ — общее число дуг в графе.

Будем говорить, что сеть оптимальна (эффективна), если она минимизирует социальную стоимость $SC(G)$. Справедливы следующие утверждения:

Лемма 1. Если $\alpha \geq 2$, то любая звезда является оптимальным решением и если $\alpha \leq 2$, то оптимальным решением будет полный граф (см., например, рис. 4а и 4б).

Лемма 2. Если $\alpha \geq 1$, то любая звезда является Нэш-равновесным решением и если $\alpha \leq 1$, то полный граф будет Нэш-равновесным решением.

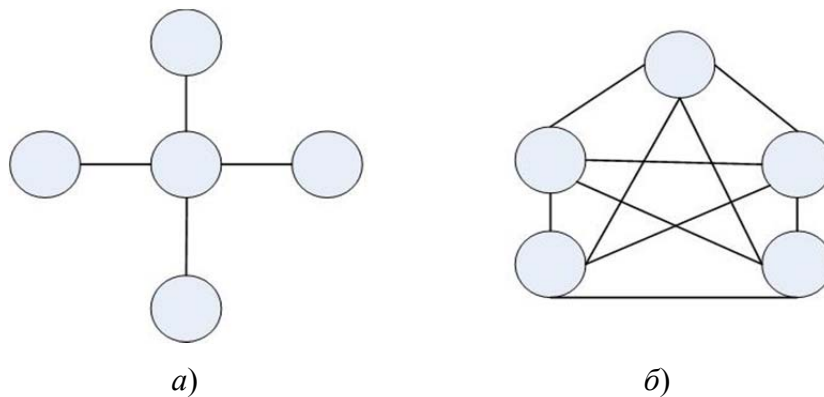


Рисунок 4. Пояснение к леммам 1, 2.

Эти утверждения позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Если $\alpha \geq 2$ или $\alpha \leq 1$, цена стабильности равна 1. Для $1 < \alpha < 2$ цена стабильности не превосходит $4/3$.

Комментарий. Остается открытым вопрос о равновесных решениях в случае, когда степень любой вершины ограничена константой, т. е. не зависит от общего числа вершин в графе. Это условие не выполняется ни для звезды, ни для полного графа, а между тем оно в практических ситуациях может быть определяющим.

Цена анархии. Для определения цены анархии необходимо, прежде всего, оценить сверху величину $SC(G)$ — социальную стоимость сети G . Эта оценка дается следующей леммой.

Лемма 3. Если Нэш-равновесный граф G имеет диаметр d , то социальная стоимость G превосходит минимальную стоимость сети не более чем в $\text{const} \cdot d$ раз.

На основании этой леммы доказывается.

Теорема 2. Так как диаметр Нэш-равновесного графа не превосходит $2\sqrt{\alpha}$, то и цена анархии не превосходит $O(\sqrt{\alpha})$.

Для доказательства этой теоремы необходимо установить границу для диаметра любого Нэш-равновесного графа, точнее говоря, показать, что для любой пары вершин u и v этого графа $\text{dist}(u, v) < 2\sqrt{\alpha}$. Для этого достаточно заметить [29], что в случае, когда для некоторых вершин u и v $\text{dist}(u, v) \geq 2k$ (k — некоторая положительная константа), то при добавлении дуги (u, v) вершина u должна заплатить α , но сократит сумму кратчайших путей ко всем вершинам между u и v на величину

$(2k-1) + (2k-3) + \dots + 1 = k^2$. Таким образом, если $\text{dist}(u, v) > 2\sqrt{\alpha}$, вершине u выгодно добавить дугу (u, v) , а значит, отклониться от рассматриваемого решения, что противоречит предположению о том, что рассматриваемый граф находится в Нэш-равновесии.

Теорема 2 дает оценку цены анархии только в зависимости от стоимости создания дуг в сети. Очевидно, что окончательная оценка не может не зависеть от общего числа вершин. Действительно, в [6] показано, что в общем случае граница цены анархии есть $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$. Таким образом, если стоимость создания дуг в сети имеет порядок общего числа вершин, стоимость анархии будет расти с ростом n как $O(\sqrt{n})$.

Представляется, что если вопрос оценки величин анархии и стабильности возникнет при проектировании больших распределенных сетей, ответ может быть получен только численными методами. К счастью, есть основания полагать, что сложность алгоритмов, с помощью которых можно будет установить значения этих параметров при произвольных и различных значениях стоимости создания связей (дуг) и произвольном числе вершин, не будет превосходить $O(n^3)$.

3.3. Потенциальные игры

Хотя для многих (если не для большинства) практически интересных моделей теории игр достаточно просто доказать существование равновесия (стабильного состояния), однако алгоритмически поиск равновесия является крайне трудной процедурой. Точнее говоря, было установлено, что чаще всего эти процедуры являются *intractable*, что не позволяет (для задач большой размерности) надеяться на нахождение состояния равновесия в практически приемлемое время. А ведь сегодня, как можно понять из приведенных примеров, основной интерес представляют игры, число участников в которых может измеряться многими тысячами, если не миллионами.

Понятие «потенциальной игры», такой, где *намерение всех* игроков изменить их стратегию можно описать, используя единственную функцию, названную потенциальной, было впервые предложено в 70-ые гг. Р. Розенталем [25] (*Robert W. Rosenthal*). Но лишь спустя 20 лет становится ясно, насколько перспективным оказался предложенный им подход [19]. Дело в том, что потенциальные игры обладают уникальными свойствами: в них всегда существует чистое равновесие и динамический процесс получения лучших ответов гарантированно сходится⁹. Эти свойства, в свою очередь, обеспечивают возможность получения достаточно точных оценок цены стабильности в играх глобальной связности. Но прежде необходимо привести некоторые сведения о потенциальных играх.

⁹ В теории игр динамический процесс получения лучших ответов (*best response dynamics*) представляет собой класс правил обновления игровых стратегий, при котором стратегии игроков в следующем раунде определяются лучшими ответами некоторого подмножества всех игроков.

Потенциальные игры могут быть *ординальными* или *кардинальными*. В кардинальных (иначе говоря, точных потенциальных) играх разница в *индивидуальных платежах* каждого игрока, которая является результатом изменения его индивидуальной стратегии, должна быть в точности равна изменению значения самой потенциальной функции. Для ординальных игр только *знаки* этой разницы должны быть те же (если платеж уменьшился, то и значение потенциальной функции уменьшилось и наоборот).

Наличие потенциальной функции игры оказывается полезным и наглядным способом для анализа свойств равновесия, потому что намерение всех игроков отображено в поведении всего лишь одной функции. Несложно догадаться, что множество равновесных ситуаций игры как-то связано с наличием локальных оптимумов потенциальной функции. Более того, сходимость за конечное время к чистому Нэш-равновесию некоторой повторяющейся потенциальной игры также определяется видом потенциальной функции для этой игры.

В качестве простого примера потенциальной игры рассмотрим игру с экстерналиями (*externality*), т. е. такими внешними эффектами в процесс игры (чаще всего экономической), которые не учитываются непосредственно в структуре рыночных цен.

Примером положительной экстерналии может служить взаимодействие двух хозяйств: пасеки и фруктового сада. Владельцы этих хозяйств не вступают ни в какие рыночные отношения, но каждый получает выигрыш от соседства: пчелы, опыляя яблони, способствуют повышению урожайности, а яблони позволяют пчелам увеличить сбор пыльцы, а, значит, их владельцу увеличить сборы меда.

Положительная экстерналиа может быть результатом деятельности человека, озабоченного лишь собственными интересами: когда владелец одной из квартир размещает на лестничной площадке дополнительный светильник, он заботится о себе, но остальные его соседи по лестничной площадке бесплатно получают некоторую полезность.

Отрицательные экстерналии встречаются много чаще: это и автомобилисты, которые загрязняют воздух *всем* живущим в городе и создающие пробки, от которых страдают другие автомобилисты, и предприятия, загрязняющие воду и воздух, и лесозаготовители, деятельность которых губит еще не подросшие деревья, и множество других явлений, характерных для современной цивилизации.

Рассмотрим платежную матрицу на рис. 5.

	+1	-1
+1	$b_1 + w, b_2 + w$	$b_1 - w, -b_2 - w$
-1	$-b_1 - w, b_2 - w$	$-b_1 + w, -b_2 + w$

Рисунок 5. Платежная матрица

В этой игре каждый из двух игроков имеет две стратегии (+1, -1), а индивидуальные платежи игроков задаются функцией $u_i(s_i, s_j) = b_i s_i + w s_i s_j$, где $s_i(s_j)$ — стратегии одного и другого игрока, а w есть величина положительной экстерналии при выборе соответствующей стратегии.

Игра, описанная платежной биматрицей является игрой с потенциальной функцией

$$P(s_1, s_2) = b_1 s_1 + b_2 s_2 + w s_1 s_2.$$

Проанализируем, что происходит в этой игре, когда игрок 1 меняет стратегию -1 на стратегию +1. Изменение величины платежа в соответствии с функцией $u_i(s_i, s_j)$ будет

$$\Delta u_1 = u_1(+1, s_2) - u_1(-1, s_2) = b_1 + b_2 s_2 + w s_2 - ((-1) b_1 + b_2 s_2 - w s_2) = 2 b_1 + 2 w s_2.$$

Теперь можно проверить, что соответствующее изменение в потенциальной функции в точности равно изменению величины платежа:

$$\Delta P = P(+1, s_2) - P(-1, s_2) = (b_1 + b_2 s_2 + w s_2) - (-b_1 + b_2 s_2 - w s_2) = 2 b_1 + 2 w s_2 = \Delta u_1.$$

Очевидно, что для второго игрока результат эквивалентен (изменение величины платежа равно изменению в значении потенциальной функции).

Пусть численные значения параметров выбраны следующим образом: $b_1 = 2$, $b_2 = -1$, $w = 3$. В этом случае платежная функция игры выглядит, как показано на рис. 6.

	+1	-1
+1	5, 2	-1, -2
-1	-5, -4	1, 4

Рисунок 6. Платежная матрица

Такая платежная матрица характерна для игры «семейный спор» или, как ее чаще называют, «битва полов». В этой игре муж и жена решают, как им совместно провести время: пойти на футбол (+1, +1) или пойти на балет (-1, -1).

В случае «семейного спора» имеют место два чистых Нэш-равновесия (+1, +1) и (-1, -1) и эта особенность сохраняется при любой величине экстерналии $w \geq 3$. Эта положительная экстерналия играет роль «семейного согласия», в результате которого семейная пара предпочитает координировать свои желания. Легко проверить, что если экстерналия станет отрицательной (например, в нашем примере $b_1 = 2$, $b_2 = -1$, $w = -3$) чистыми равновесиями по Нэшу станут действия (+1, -1) и (-1, 1), т. е. муж и жена будут стремиться противоречить друг другу.

Игра, показанная на рис. 6, описывается потенциальной функцией $P(s_1, s_2)$ вида, показанного на рис. 7, где ситуация (1, 1) является глобальным максимумом выбранной потенциальной функции $P(s_1, s_2)$.

	+1	-1
+1	4	0
-1	-6	2

Рисунок 7. Платежная матрица

3.4. Игры глобальной связности

В отличие от сетей локальной связности, при изучении сетей глобальной связности *игрок* не ассоциируется с какой-то конкретной индивидуальной вершиной сети. Игрок преследует глобальную цель — достижение некоторой величины связности сети, для чего он имеет возможность вкладывать деньги в создание любого подмножества дуг этой сети. Полученная связность сети будет мерой качества этой сети. Но игроки в общем случае не стремятся к равномерной связности; каждый игрок интересуется лишь некоторым подмножеством вершин, связность которых он хочет обеспечить, но, конечно, минимально возможной ценой. В отличие от ситуаций локальных игр, в глобальной игре величина расстояния $dist(u, v)$ для произвольной пары вершин (u, v) не имеет значения, главное — соединить *выбранные терминальные* вершины. Но поскольку общим желанием является построение, как можно более дешевой, то, приписав каждой дуге e стоимость $c_e \geq 0$, будем предполагать, что *все* игроки, которые пользуются этой дугой, поровну делят между собой эту стоимость.

В качестве модели сети глобальной связности будем рассматривать ориентированный граф $G(V, E)$, где каждой дуге приписана неотрицательная стоимость c_e . Задано k игроков и для каждого игрок i определены вершина-исток s_i и вершина-сток t_i . Целью игрока i построить такую сеть, в которой вершина t_i будет достижима из s_i , причем затратив на это минимум возможного. Это значит, что стратегией игрока i будет путь P_i из s_i в t_i в графе G . Выбирая путь P_i , игрок участвует в построении всех дуг этого пути в окончательной структуре графа. При заданной стратегии каждого игрока спроектированная сеть (граф G) определяется как $\bigcup_i P_i$.

Как уже было замечено выше, мы предполагаем, что стоимость каждой дуги равномерно распределяется между всеми игроками, которые этой дугой пользуются. Точнее говоря, если k_e — количество игроков, путь которых содержит дугу e , то каждый игрок платит величину c_e / k_e . Таким образом, общая стоимость того, что должен заплатить игрок i при реализации стратегии S , определяется как $C_i(S) = \sum c_e / k_e$. Поэтому общая сумма, заплаченная всеми игроками в сети, в точности равна стоимости созданной ими сети. Ранее было показано, см. например, [11], что такая схема деления расходов между участниками удовлетворяет

набору естественных аксиом и является *справедливым* механизмом или *разделением стоимости по Шепли* (Shapley cost-sharing).

В качестве примеров сетей глобальной связности рассмотрим игровые задачи в транспортных сетях, так называемые игры в сетях Шепли (Shapley network design game). Для начала рассмотрим игру в простейшей сети Шепли, где стоимость верхней дуги k , нижней $1 + \epsilon$, где $\epsilon > 0$ произвольно малая величина и в игре принимает участие k игроков (рис. 8).

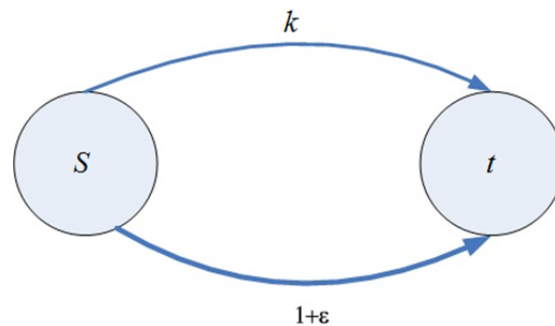


Рисунок 8

В этой сети k игроков используют одну и ту же вершину источника s и вершину назначения t . Какие стратегии игроков окажутся Нэш-равновесными (стабильными) в этой сети?

В этой игре множество равновесий и эти равновесия существенно отличаются по качеству.

Предположим, *каждый* игрок выбирает нижнюю дугу, стоимость которой $1 + \epsilon$. Полученный исход будет Нэш-равновесием, поскольку отклонение от него почти в k раз увеличит для каждого стоимость. С другой стороны, если *все* выберут правую дугу, то для каждого стоимость маршрута будет 1 , т. е. меньше, чем по левой дуге, и потому каждому не будет иметь смысл отклоняться от такого маршрута. Это будет второе Нэш-равновесие.

Показатель качества рассматриваемой сети Шепли это суммарная стоимость всех выбранных игроками маршрутов в сети (такой показатель часто называют *социальной стоимостью*). Социальная стоимость сети это и есть оптимальная стоимость сети, поэтому, зная ее, можно установить коэффициенты анархии и стабильности для сети. Оптимальная стоимость сети на рис. 8 не превосходит 1 . Стоимость для первого НР (по нижней дуге) равна 1 , а второго — k . В результате, цена анархии будет равна числу игроков, а цена стабильности равна 1 (напомним, что цена стабильности определяется отношением *лучшего* значения стоимости в равновесии к оптимальной стоимости). Таким образом, два «одинаково равновесных» состояния оказываются качественно различными по стоимости, что говорит об ограниченности применения понятия «равновесие по Нэшу» для определения эффективности выбираемых стратегий поведения. Простой пример, рассмотренный здесь,

оказывается — с точки зрения цены анархии — худшим из возможных случаев. Можно показать, что это верхняя оценка для цены анархии, т. е. в *любой* сети Шепли цена анархии не может быть больше числа игроков.

Способ разделения стоимости общих дуг между игроками может стать существенным фактором с точки зрения цены анархии. В [6] показано, что чрезвычайно простой *Shapley cost-sharing* метод приводит к оценкам цены анархии очень далеким от оптимальных. Точнее говоря, в любом ненаправленном графе с одной вершиной стока для всех игроков существует такой способ разделения стоимости дуг, при котором цена анархии не будет превосходить 2. Важно, что нахождение такого способа производится с помощью такого алгоритма, трудоемкость которого всего лишь «слабо нелинейна», как по числу вершин, так и по числу дуг в графе.

Перейдем к оценкам цены стабильности. Цена в *лучшем* по стоимости состоянии равновесия также может быть больше социальной цены. Это видно из примера сети Шепли, показанной на рис. 9.

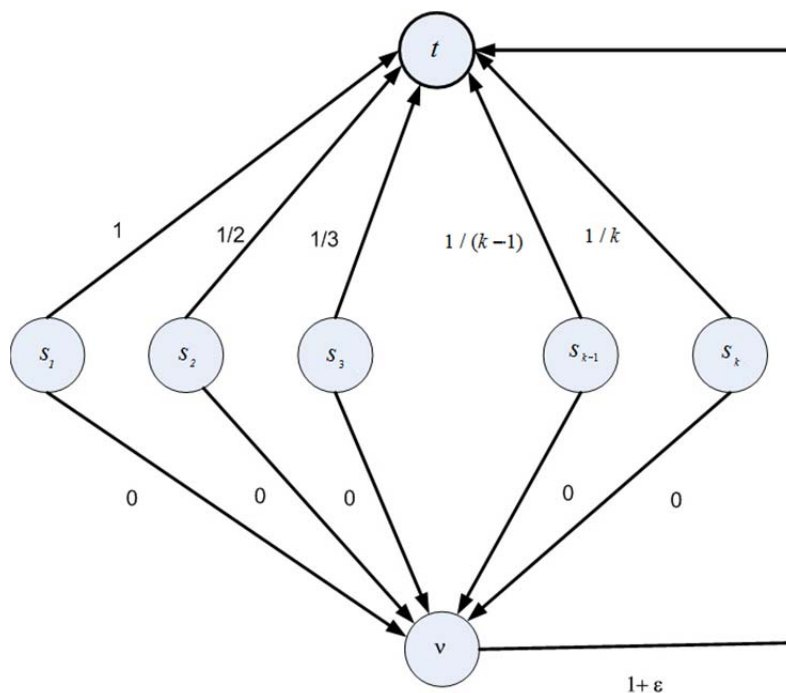


Рисунок 9

В этой игре k игроков, каждый из которых имеет *свою* вершину истока, и должен достичь одного и того же стока (пункта назначения) s . Для каждого игрока i , ($i \in [1, k]$) стоимость дуги равна $1/i$. Очевидно, оптимальная стоимость этой сети равна $1 + \epsilon$, которая реализуется, если *все* игроки выбирают дугу (vt) . Однако такой способ *не является* равновесием, ведь каждому игроку i рационально двигаться по дуге от вершины s_i непосредственно к вершине t . Убедиться в этом можно, заме-

тив, что для игрока k не имеет смысла двигаться по дуге (vi) поскольку $(1 + \varepsilon) / k > (1 / k)$. Того же рода неравенство будет справедливо (по индукции) для игроков $k - 1, k - 2, \dots, 1$. Значит, прямой путь является доминантной стратегией для каждого игрока и Нэш-равновесие реализуется, когда все игроки выбирают прямой путь в вершину назначения. При этом стоимость Нэш-равновесия будет равна $H_k = \sum(1/i)$ по всем $i \in [1, k]$. H_k называется гармоническим числом, его величина примерно равна $\ln k$.

Приведенный пример свидетельствует, что даже цена стабильности может расти с ростом числа игроков, хотя и логарифмически. Это лишний раз указывает на то, что стремление к получению равновесных стратегий далеко не всегда эффективная стратегия, во всяком случае, если показателем качества является социальная стоимость, которая учитывает суммарные интересы *всех* игроков. Но может ли цена стабильности расти, как и цена анархии, пропорционально числу игроков?

Ответить на этот вопрос помогают потенциальные функции, о которых шла речь в предыдущем разделе. Было установлено, что все сети Шепли представляют собой потенциальные игры. Поэтому для всех таких сетей существуют равновесия в чистых стратегиях, что и позволяет установить общий результат о верхней оценке для цены стабильности. Оказалось, что цена стабильности в играх глобальной связности с k игроками никогда не бывает больше, чем гармоническое число H_k [6]. Таким образом, сеть Шепли на рис. 9 есть пример сети с максимально возможной ценой стабильности, пропорциональной логарифму числа игроков. Иными словами, k игроков, каждый из которых действует исключительно в собственных интересах, проиграют не более чем в $\log k$ раз в значении стоимости (по сравнению с оптимальным значением). Более того, было показано, что применение схем разделения стоимости, отличных от Shapley cost-sharing метода, не может улучшить эту оценку, как это было в случае с оценкой цены анархии.

Какой ценой могут быть достигнуты механизмы игр с оптимальными значениями цены стабильности — это уже совершенно отдельный вопрос. Во всяком случае, если говорить о цене получения чистого Нэш-равновесия, то было показано [10], что проблема нахождения такого равновесия в потенциальных играх относится к классу PLS-полных проблем (*Polynomial Local Search complete*).

3.5. Транспортные сети и «здоровый смысл»

Транспортные сети Шепли поставляют множество примеров игр в сети с неожиданными исходами. На рис. 10 показан пример, предложенный Пиго (Pigou).

Здесь две вершины s (начало маршрута) и t (конец маршрута). Для каждой из двух дуг заданы функции стоимости $c(x)$, где x — некоторая непрерывная переменная из интервала $[0, 1]$. Пусть переменная $x = 1$, это некоторый максимальный автомобильный поток. Для верхней дуги $c(x) = 1$, для нижней $c(x) = x$. Это означает, что стоимость проезда по нижней дуге тем меньше, чем меньше трафик, а стоимость по верхней дуге от трафика не зависит вовсе. Рациональные водители долж-

ны выбирать нижнюю дугу — это доминантная стратегия. В результате, когда x станет равным 1, для *каждого* водителя стоимость станет равной 1 и такой же будет средняя стоимость. Однако легко обнаружить, что это равновесное решение не является оптимальным. Если половина водителей выберет верхнюю дорогу, то средняя стоимость (социальная цена) будет равна $(1/2)(1/2) + (1/2) = 3/4$. Равновесие в этой игре одно, поэтому цена анархии и цена стабильности равны $4/3$.

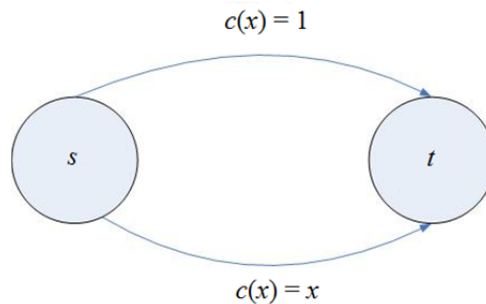


Рисунок 10. Пример Пиго.

Еще более удивительный пример получил в специальной литературе название парадокс Браесса (Braess's Paradox) [6].

На рис. 11а изображена сеть из четырех вершин: вершина начала маршрута s , вершина назначения t и две промежуточные вершины v и w . На дугах указаны стоимости (время в пути). По дугам sw и vt время в пути равно 45 мин., а по дугам sv и wt зависит от интенсивности движения как $T/100$, где T — количество автомобилей.

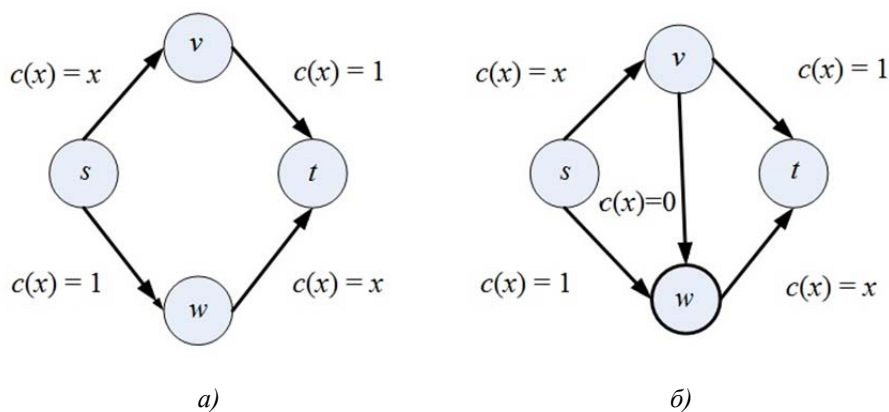


Рисунок.11. Парадокс Браесса.

В условиях равновесия транспортный поток разделяется на две равные части, поскольку время в пути равно по обоим маршрутам. В нашем случае это время в

равновесии будет $45 + T/200$. Пусть для определенности $T = 4000$. Тогда это время будет 65 мин. Предположим, что градоначальник, недовольный временем проезда из s в t , изыскал средства для построения новой дороги из вершины v в вершину w для разгрузки существующего трафика. Причем для того, чтобы новая сеть была наверняка лучше существующей, добились того, что стоимость проезда по маршруту vw была равна 0 (это вовсе не значит, что строительство этой дороги ничего не стоило, скорее наоборот).

Автомобилисты возрадовались и равновесие сместилось. Поскольку путь из s в v , в худшем случае, т. е. когда *все* по нему поедут, займет $4000/100 = 40$ мин., а путь sw займет 45 мин., весь поток направится по новому маршруту swt . В этом случае каждый из сменивших маршрут будет ехать 80 мин. Так, в результате появления новой дороги и, как следствие, смещения равновесного поведения, среднее время в пути увеличилось почти на 20%.

Не следует думать, что описанный выше эффект проявляется лишь при выбранных нами числовых значениях. Будь это так, он не был бы парадоксом. В своей статье Браесс рассмотрел общий случай, показав, при каком виде функций стоимости это явление будет иметь место.

Удивительно, но парадокс Браесса оказался похож на некий ранее неизвестный «закон природы». Во-первых, выяснилось, что если рассматривать произвольную транспортную сеть (произвольный ориентированный граф) и добавлять в этот граф новые маршруты — не обязательно состоящие из одной дуги — то этот парадокс будет иметь место примерно в *половине* случаев. (Не удивительно, что в 1990 г. закрытие 42-й улицы в Нью-Йорке для движения заметно уменьшило количество заторов в этом районе. И это не единичный случай.)

Совсем неожиданным стало опубликование в 2012 г. работы международной команды физиков, из которой следует, что подобные парадоксы существуют на микроскопическом уровне. Так, в частности, при исследованиях свойств веществ на *мезоскопическом* уровне¹⁰ оказалось, что *добавление* путей для движения электронов *уменьшает* проводимость изучаемого образца.

* * *

Не следует думать, что задачи синтеза механизма игры ограничиваются теми моделями, которые были упомянуты в предыдущих разделах. Существует еще немало задач, для исследования которых используются примерно такие же методы и модели. В качестве примера можно указать проблему расположения оборудования (*facility problem*), необходимого множеству клиентов, наиболее выгодным для владельцев этого оборудования способом. Например, как расположить некоторое множество веб-серверов в сети, которая обслуживает множество пользователей. В подобной игре может быть три стадии: на первой стадии провайдеры решают задачу расположения оборудования, на второй — они устанавливают цены для пользователей, а на последней — пользователи выбирают того провайдера, чьи условия

¹⁰ Промежуточная область в физике, в которой изучаются свойства веществ в диапазоне между молекулярными размерами и размерами в десятки микрометров.

им кажутся наиболее приемлемыми. Выясняется [29], что это также потенциальная игра и, следовательно, в ней существует чистое равновесие, хотя оно может и не быть социально оптимальным (так же, как в ДУ). Кроме того, цена анархии в таких играх не превосходит 2, т. е. эгоистическое поведение незначительно ухудшает ситуацию по сравнению с централизованным.

4. Задачи *offline* и *online* и синтез механизмов игры

В алгоритмической теории игр, которая начала формироваться в последнее десятилетие, принят тот же подход к рассмотрению игровых постановок, что и в теории вычислений: изучение процессов *offline* и *online*. В первом случае предполагается, что все имеющиеся данные находятся в нашем распоряжении и с ними можно производить необходимые вычисления, во втором — данные появляются последовательно во времени и, как правило, закон появления этих данных во времени известен лишь частично. Хотя все классические постановки теории игр относятся к классу *offline*, множество классов *online* игр удивительно обширно. Вот только некоторые примеры:

- биржевые игроки, каждый из которых обладает некоторым капиталом и некоторыми представлениями о риске; наблюдая за биржевыми ценами, меняющимися во времени, игроки должны принять определенные финансовые решения: покупать ли опционы с заданными сроками, покупать или продавать ценные бумаги из своего портфеля, покупать или продавать фьючерсы с заданными сроками поставки и т. п.;
- задачи распределенных вычислений, когда разнотипные задачи пользователей необходимо распределить по различным серверам, причем интенсивность поступления задач и параметры этих задач меняются во времени по неизвестным законам (типичная ситуация, например, для создателей «облачных вычислителей»);
- онлайн-аукционы с набором торгуемых товаров и неизвестным количеством покупателей, меняющемся во времени — например, набор учащихся в платную спортивную школу по нескольким спортивным дисциплинам, когда приток желающих и их финансовые возможности неизвестны;
- всевозможные задачи поиска: поиск товаров наименьшей стоимости, поиск подходящей работы (для работника) или подходящего работника (для нанимателя).

Как можно заметить, во всех перечисленных случаях сложно или практически невозможно проведение предварительных маркетинговых исследований для получения информации о поведении «рынка».

Из приведенных примеров должна быть понятна общая картина: в каждом из этих случаев либо игроки в неизвестные моменты времени появляются и исчезают, либо последствия принятых решений в будущем априори неизвестны, либо оба этих фактора имеют место.

Так же, как и в классах online-вычислений, в online-играх существуют специальные методы классификации решений с точки зрения трудоемкости, и главное отличие состоит в том, что в игровых задачах имеют место свои показатели качества решения, в которых обычно учитываются интересы всех играющих (например, «аукционеров» и «покупателей»), которые в общем случае противоположны. Заведомо понятно, что такие методы дизайна, как механизм Викрея–Кларка–Гроуса, применительно к проведению online-аукционов оказываются неприменимы. Слишком велика неопределенность: прежде всего, неизвестны не только *типы* игроков, т. е. их истинные представления о ценности торгуемых предметов, но и точное количество игроков в каждый будущий момент времени, не говоря уж о том, что могут быть неизвестны параметры внешней среды, воздействующие на их поведение.

Комментарий. Изучение возможности решения онлайн-задач началось еще в 60-е гг. после появления неожиданных решений «проблемы секретаря» и одной из первых была работа Е. Б. Дынкина [8], опубликованная в 1963 г. Нетривиальность математических результатов и масса прикладных задач, для решения которых оказалось полезным изучение этой проблематики, привело к тому, что число опубликованных работ с той поры многократно возросло (см. подробнее, обзор [28] или en.wikipedia.org/wiki/Secretary_problem). В случае простейшей дискретной формулировки проблема состоит в том, чтобы выбрать лучшего претендента с помощью интервью из n соискателей, причем решение не может быть отложено, а должно приниматься сразу после интервью. Тогда наилучшим решением является интервью первых $t - 1$ соискателей и выбор первого из следующих, чьи достоинства превосходят любого из первых $t - 1$. При этом для больших n вероятность действительно выбрать лучшего быстро достигает величины, равной $1/e$, при том, что t/n также будет равно $1/e$.

4.1. Игры online и анализ конкурентоспособности

Объективная сложность рассматриваемых проблем потребовала некоторого ослабления требований к эффективности алгоритмов решения задач синтеза online-механизмов. В качестве основной идеологии принято получение верхних оценок сложности, т. е. синтез *наилучшего* по порядку величины показателя качества алгоритма в случае *наихудшей* внешней ситуации. В теории сложности алгоритмов о таком подходе принято говорить как об анализе конкурентоспособности (*competitive analysis*)¹¹. Учитывая тот факт, что у нас нет надежд на получение правдоподобной модели среды, в которой происходит изучаемый динамический процесс, единственное, что можно сделать, это сравнить качество предлагаемого решения с ситуацией, в которой мы бы располагали полной информацией о происходящем, т. е. ситуацией дизайна offline-механизмов.

¹¹ Предлагаемый подход (хотя и не получивший еще название competitive analysis) обязан своему происхождению работам 70-х гг. по алгоритмам аппроксимации для NP-полных проблем. Хотя по сути дела речь идет о стандартной минимаксной постановке — нахождении наилучшего алгоритма для реализации самого сложного объекта.

Наиболее понятной эта ситуация становится в случае поиска конкурентоспособных механизмов для online-решений финансовых проблем [22]. Пусть, например, трейдер на валютной бирже намерен в течение торгового дня обменять некоторое количество рублей на максимально возможное количество евро. Обменный курс меняется постоянно, но ему известны или конечный интервал цен $[m, M]$, или их отношение $\varphi = M / m$. Основываясь только на этой информации, он должен выбрать «наилучшую» цену, т. е. такой обменный курс, который будет для него наиболее выгоден. Пусть он предложил алгоритм Ω , который каждый день дает некоторое решение. Для оценки качества этого online-решения алгоритма Ω будем сравнивать его с гипотетическим случаем offline-торговли, тем алгоритмом Θ , который выбирает цену, *зная* всю последовательность цен, которая появляется в течение дня. Алгоритм Ω будем называть *c*-конкурентоспособным, если для *каждой* конечной последовательности цен $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$

$$c \cdot R(\Omega(I)) \geq R(\Theta(I)) + \alpha,$$

где $R(\Omega(I))$, $R(\Theta(I))$ — решение (суммарная величина полученных евро), «заработанных» алгоритмом $\Omega(\Theta)$; α — некоторая константа. Таким образом, *c*-конкурентоспособный online-алгоритма Ω хуже оптимального алгоритма Θ не более чем в *c* раз.

Подобный процесс биржевой торговли можно представить в виде антагонистической игры с нулевой суммой следующим образом. Первый игрок изобретает алгоритм Ω и сообщает его второму. Второй игрок (игрок offline) получает от первого описание алгоритма Ω и выбирает такую последовательность цен $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, которая *максимизирует c*. Поскольку основной целью первого игрока является *минимизация c*, такая игра становится игрой с нулевой суммой.

4.2. Информированность и online-игры полковника Блотто

Остановимся подробнее на варианте online-игры, которая берет начало от хорошо известной игры полковника Блотто. Напомним, что игра полковника Блотто (*Colonel Blotto game*), предложенная в 1921 г. Э. Борелем [5], в последние десятилетия активно изучалась, см. обзор в Б. Роберсона [24] (B. Roberson). В этой игре каждый игрок имеет ограниченный ресурс, который он должен распределить на ограниченном количестве участков («полей боя»). Игрок, который на некотором участке разместил ресурс строго больший, нежели его противник на соответствующем участке, выигрывает этот участок (гарантированно или с некоторой вероятностью). Оба игрока стремятся максимизировать количество выигранных участков (или вероятность выигрыша заданного числа полей).

В наиболее изученном дискретном варианте этой игры решение о выигрыше для двух расстановок — каждая расстановка N -мерных векторов по основанию B , в котором сумма значений всех N координат равна B — осуществляется с помощью одновременного сравнения соответствующих координат этих векторов. Таким об-

разом, как только игроки выбрали расстановку своих ресурсов в каждом из полей, вопрос о победителе (или ничейном результате) предрешен.

В классической игре полковника Блотто очевидным образом отсутствует равновесие в чистых стратегиях, и основные усилия теоретиков были сосредоточены на поисках таких расстановок у противников, которые могут обеспечить равновесие в смешанных стратегиях. Окончательные результаты получил Б. Робертсон. Он, в частности, показал, в каком классе функций распределения ресурсов противники могут достигнуть равновесия в смешанных стратегиях при *любых* начальных соотношениях ресурсов у них.

Комментарий. Игра полковника Блотто по существу это усложненный вариант классической игры *matching penny*, антагонистической игры с нулевой суммой, в которой один игрок получает 1, а его противник -1 , когда показанные ими монеты соответствуют друг другу (оба игрока показывают орла или оба решку), а второй получает 1 (соответственно противник -1), когда монеты показаны противоположной стороной. В такой игре нет равновесия в чистых стратегиях, а есть единственное равновесие в смешанных стратегиях, когда игроки с одинаковой вероятностью показывают орел и решку. Конечно, цена игры будет равна нулю и примерно такая же ситуация будет в игре Блотто: в состоянии равновесия при условии одинаковых ресурсов у противников цена игры будет равна нулю и добиться этого можно, равномерно и независимо размещая ресурс на каждом поле.

Более или менее очевидно, что классическая постановка игры полковника Блотто допускает огромное количество обобщений и в последние годы интерес к этим возможностям постоянно растет [13]. В этой работе, в частности, содержится обширный перечень применений таких обобщенных моделей для военных приложений, политических баталий, спортивных событий, бизнеса, юстиции, организованной преступности и проблем образования.

В данном обзоре нет возможности сколько-нибудь подробно разобрать состояние дел во множестве современных работ, обобщающих классическую игру полковника Блотто, что уже сделало его *General Blotto*. Остановимся лишь на возможности изучения вопросов информированности противников в игре полковника, потому что это имеет прямое отношение как к проблемам полноты информации в играх (проблема 2 из первого раздела), так и к организации конкурентоспособной online-игры.

4.3. Задача об инсайде

Для понимания важности информированности игроков в игре полковника приведем простой пример. Пусть два игрока участвуют в тендере на получение концессии по разработке ряда участков, содержащих полезные ископаемые. Условия проведения конкурса таковы: месторождение разбито на N участков. Можно подать $R \leq N$ заявок. В каждой заявке указывается стоимость, которую участник готов заплатить за данный участок. Тот участник, который предложил большую стоимость не менее чем за $(N/2)+1$ участок, объявляется победителем и получает пра-

ва на разработку всех N участков. При одинаковом числе выигранных участков объявляется новый конкурс. Если участник не обладает информацией о величине ресурсов соперника (максимальной сумме средств, которую он готов потратить), то при одинаковой величине ресурсов $B_1 = B_2 = B$ нельзя получить гарантированный результат, но можно «почти всегда» получить ничью в случае, когда ресурсы распределяются на всех N в соответствии с теоремой Роберсона. «Почти всегда» здесь означает, что отношение числа размещений соперника, при которых ему удастся выиграть, стремится к 0 при $N \rightarrow \infty$.

Предположим теперь, что участник имеет одному ему известную оценку полезности выигрыша тендера и рассматривает инсайдерское предложение за некоторую сумму β получить информацию о размещении ресурсов у соперника. Источник и потребитель информации имеют свои представления о стоимости сообщаемой информации, которыми они не собираются делиться. Потому налицо классическая задача выбора равновесной цены, которая удовлетворит и покупателя, и продавца. Решение подобной задачи возможно лишь в том случае, когда потребитель информации обладает ясным пониманием того, сколько ценна будет полученная информация, т. е. насколько больше шансов будет у него выиграть тендер, после того как он получит эту информацию. И, конечно, в идеале он стремится получить такую информацию, которая гарантирует ему победу.

Из этого примера должно быть понятно, что анализ информированности игроков о решениях противника (хотя бы и неполные сведения о том, как противник разместил ресурсы) в прикладных задачах, описываемых моделью полковника Блотто, может иметь первостепенное значение. Без получения таких оценок невозможен анализ конкурентоспособности предлагаемых алгоритмов игры полковника Блотто в режиме *online*.

На основании оценок ресурсов, необходимых и достаточных для гарантированной победы в случае различных предположений об информированности, можно показать, что если противники в игре полковника Блотто обладают одной и той же суммарной величиной ресурса B , размещенного на N полях, причем $B = O(N \log^2 N)$ и стоимость получения информации о ресурсе, размещенном на отдельном поле $\varphi \leq \log B$, то существует c -конкурентоспособный алгоритм Ω , который *гарантированно* выигрывает более $N/2$ полей у любого противника.

Таким образом, возможность (не бесплатная!) получать информацию о противнике может существенным образом повлиять на решение о выборе стратегии размещения ресурсов. Можно даже практически точно оценить получаемое преимущество в объеме ресурсов. А именно, в состоянии смешанного равновесия по Нэшу можно добиться почти гарантированного выигрыша более чем $N/2$ полей лишь при условии двукратного перевеса по ресурсам, т. е. имея $2B$ ресурсов против B у противника. Цифровое моделирование убеждает, что, когда достигается смешанное равновесие по Нэшу при двукратном перевесе сил у одного из игроков, вероятность выиграть более $N/2$ полей не меньше 0.999. Представляется интерес-

ным проверить ценность информированности игрока для конкретной прикладной ситуации, например, типа упомянутой ранее задачи об инсайде, осуществив моделирование на множестве правдоподобных значений всех параметров.

5. Заключительные замечания

В России (по крайней мере, во многих университетах) бытует представление о математической теории игр, как о специальном разделе теории исследования операций, в котором рассматриваются крайне простые модели задач принятия минимаксных решений (главным образом антагонистические игры с нулевой суммой), никакого отношения к реальным прикладным задачам не имеющие. Между тем, два предыдущих десятилетия стали временем превращения этой теории не только в *прикладной* инструмент проектирования рынков, но и метод исследования многих других важных проблем, например, алгоритмов обучения.

Присуждение в 2012 г. премии Шведского государственного банка по экономическим наукам памяти Альфреда Нобеля (в просторечии Нобелевской премии по экономике) Ллойд Шепли и Элвину Роту «за теорию стабильного распределения и практики устройства рынков» стало знаком окончательного признания теории игр как практически необходимого инструмента принятия решений в постиндустриальную эпоху. Характерно, что, насколько можно судить по опубликованным высказываниям некоторых известных российских ученых-экономистов, эта Нобелевская премия за «практику устройства рынков» вызвала у них недоумение. А ведь еще в 1999 г. Э. Рот замечал [26], что если раньше в проектировании рынков участвовали менеджеры и предприниматели, законодатели и судьи, современное развитие рынков привело к необходимости использования теоретиков в области теории игр. Именно эта теория есть та часть экономики, которая занимается исследованием и синтезом «правил игры», определяющих поведение рынка. Добавить к этому можно лишь то, что слово «экономика» может быть с не меньшим правом заменено словами «социология», «политология» и вообще любые научные исследования, которые не могут не учитывать взаимоотношения людей в процессе принятия решений.

Работы самого Рота и его соавторов относились к созданию рынков труда, в первую очередь, в медицинской сфере и начинались еще в 80-е гг. [27]. С тех пор появилось много новых примеров того, как изменилось классическое представление о рынках, как о площадке, на которой встречаются покупатели и продавцы и где регулирование осуществляет «невидимая рука рынка». Широко известен пример продажи радиочастот в Соединенных Штатах [17], когда Конгрессом было принято решение не раздавать лицензии на радиочастоты, а организовать аукцион. Причем целью было не только получить дополнительный доход, но, что важнее, добиться более эффективного использования каналов связи. Поэтому понадобилась серьезная работа по созданию правил проведения такого аукциона, которые должны были учитывать особенности использования радиочастот для разных районов, в частности, правила совместной продажи лицензий в различных районах. В резуль-

тате был спроектирован многоаундовый аукцион, правила которого позволяли добиться выгодных условий не только для всех сторон, принимающих участие в аукционе, но и для пользователей услуг связи.

Особо имеет смысл отметить то обстоятельство, что создание эффективных методов проектирования рынков, как и всякая серьезная *техническая проблема*, требует большой лабораторной работы, ибо одних лишь теоретических результатов, без лабораторных экспериментов, явно недостаточно для получения практически пригодных результатов. (Ситуация в точности такая же, как и при создании эффективных вычислительных методов — лишь кропотливая и трудоемкая работа позволяет превратить некий оптимальный по порядку величины метод вычислений в численный алгоритм, который будет конкурентоспособен на практике с теоретически не оптимальными алгоритмами.)

Логика игрового подхода в последнее время стала применяться самым неожиданным образом. Примером могут служить работы по методам предсказаний (за подробностями можно обратиться к статье [22]). Грубо говоря, основная идея здесь состоит в том, что для качественного предсказания — особенно в случаях, когда все усилия создать правдоподобную модель явления оказались безрезультатными — следует довериться «коллективному разуму». Но не в виде каких-то опросов или сбора иных статистических материалов, а к тому, что чаще всего заставляет разум, в особенности «коллективный», работать, а именно к денежному вознаграждению. Пусть вас интересует значение среднегодовой температуры через пять лет. Выпустите ценную бумагу, которая будет выплачивать $\$x$ в случае, если через пять лет температура будет x , после чего выпустите эту бумагу в свободное обращение на рынок. Сторонники глобального потепления будут склонны покупать эту бумагу по цене, превосходящей среднегодовую температуру за прошлый год, скептики будут склонны продать такую бумагу. Таким образом, рынок найдет равновесную цену рациональных ожиданий.

Относительно эффективных рынков ценных бумаг и реализации рациональных ожиданий написаны горы книг и статей. Пока еще никому не удалось доказать безусловную полезность наблюдений за поведением рынка — «психика» рынка слишком неустойчива и подвержена множеству иррациональных влияний. Что, впрочем, не исключает того, что подобный подход к прогнозу в некоторых случаях может оказать пользу. Во всяком случае, сегодня ряд компаний — и не только стартапов таких, как *CrowdIQ*, *InklingMarkets*, *NewsFutures*, но и гранды *Google* и *Microsoft* экспериментируют с подобными методами прогноза в частном секторе. И уж конечно СМИ всячески раскручивают эту тему, хотя научная пресса также не остается в стороне — с 2006 г. издается научный журнал *Journal Prediction Markets*. Пройдет еще несколько лет, пыль рассеется и не исключено, что удастся описать те случаи, для которых подобные подходы действительно окажутся эффективны.

Литература

- [1] Algorithmic game theory / Ed.: N. Nisan. — Cambridge Univ. Press, 2007.
- [2] Arrow K. J. A difficulty in the concept of social welfare // Journal of Political Economy. 1950. Vol. 58. No. 4 (August). P. 328–346.
- [3] Babaioff M., Chuang J., Feldman M. Incentives in peer-to-peer systems // Algorithmic game theory / Ed.: N. Nisan et al. — Cambridge Univ. Press, 2007.
- [4] Ben-Tal A., Ghaoui L. El., Nemirovski A. Robust optimization.— Princeton University Press, 2009.
- [5] Borel E. La theorie du jeu les equations integrales a noyau symetrique // Comptes Rendus del Academie. 1921. Vol. 173. No.19. P. 1304–1308 (English translation by Savage L.: The Theory of Play and Integral Equations with Skew Symmetric Kernels // Econometrica, 1953. Vol. 21. No. 1. P. 97–100.
- [6] Braess D., Nagurney A., Wakolbinger T. On a paradox of traffic planning // Transportation science. 2005. Vol. 39. No. 4. P. 446–450.
- [7] Bulow J., Klemperer P. Auctions versus negotiations // The American Economic Review. 1996. Vol. 86. No. 1. P.180–194.
- [8] Дынкин Е. Б. Оптимальный выбор момента остановки марковского процесса // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150. №. 2. С. 238–240.
- [9] El-Yaniv R. Competitive solutions for online financial problems // ACM Computing Surveys. 1998. Vol. 30. No. 1. P. 28–69. (doi: 10.1145/274440.274442)
- [10] Fabricant A. et al. On a network creation game // Proc. of the twenty-second annual symposium on Principles of distributed computing PODC'03. — NY: ACM, 2003. P. 347–351. (doi: 10.1145/872035.872088).
- [11] Feigenbaum J., Papadimitriou C. H., Shenker S. Sharing the cost of multicast transmissions // Journal of Computer and System Sciences. 2001. Vol. 63. No. 1. P. 21–41. (doi: 10.1006/jcss.2001.1754).
- [12] Friedman E. J., Halpern J. Y., Kash I. Efficiency and Nash equilibria in a scrip system for p2p network // Proc. 7th ACM conference on Electronic commerce. — NY: ACM, 2006. P.140–149. (doi: 10.1145/1134707.1134723).
- [13] Golman R., Page S. E. General Blotto: games of allocative strategic mismatch // Public Choice. 2009. Vol. 138. No. 3-4. P. 279–299. (doi: 10.1007/s11127-008-9359-x).
- [14] Hurwicz L. On informationally decentralized systems // Decision and optimization. Ed.: B. McGuire, B. Radner.— Amsterdam: North-Holland, 1972.
- [15] Jackson M., Wolinsky A. A strategic model of social and economic networks // Journal of Economic Theory. 1996. Vol. 71. No. 1. P. 44–74. (doi: 10.1006/jeth.1996.0108).
- [16] Klemperer P. Auctions: Theory and Practice.— Princeton University Press, 2004.
- [17] Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр.— М. : Физматлит., 1960.

- [18] *Milgrom P.* Game theory and the spectrum auctions // *European Economic Review*. 1998. Vol. 42. No. 3–5. P. 771–778. (doi: 10.1016/S0014-2921(97)00146-3).
- [19] *Monderer D., Shapley L.S.* Potential games // *Games and Economic Behavior*. 1996. No. 14. P. 124–143.
- [20] *Myerson R. B.* Optimal auction design // *Math. Oper. Res.* 1981. Vol. 6. No. 1. P.58–73.
- [21] *Nash J.* The bargaining problem // *Econometrica*. 1950. Vol. 18. No. 4. P.155–162.
- [22] *Нейман Дж. Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение.— М.: Физматлит, 1970 (J. von Neuman, O. Morgenshtern Theory of games and economic behavior. Princeton Univers. Press 1944, 2th ed. — 1947, 3th ed.— 1953).
- [23] *Pennock D. Sami R* Computational Aspects of Prediction Markets // *Algorithmic game theory / Ed.: No. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. V. Vazirani.* Chap 26.— Cambridge University Press, 2007. P. 651–676.
- [24] *Roberson B.* The Colonel Blotto game // *Economic Theory*. 2006. Vol. 29. No. 1. P. 1–24. (doi: 10.1007/s00199-005-0071-5)
- [25] *Rosental R. W.* A Class of games possessing Pure-Strategy Nash Equilibria // *Int. J. Game Theory*. 1973. No. 2. P. 65–67.
- [26] *Roth A. E.* Game Theory as a Tool for Market Design Game Practice // *Contributions from Applied Game Theory. Theory and Decision Library*. 2000. Vol. 23. P. 7–18. (doi: 10.1007/978-1-4615-4627-6_2).
- [27] *Roth A. E.* The Evolution of the labor market for medical interns and residents: A Case study in game theory // *Journal of Political Economy*. 1984. Vol. 92. No. 6. P. 991–1016.
- [28] *Sakaguchi M.* Optimal stopping games: A review // *Math. Japonica*. 1995. Vol. 42. No. 2. P. 343–351.
- [29] *Tardos E., Wexler T.* Network formation games and the potential function method // *Algorithmic game theory*. Eds.: N. Nisan, T. Roughgarden, É. Tardos, V. V. Vazirani. Chap. 19. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. P.487–516.
- [30] *Vickrey W.* Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders // *The Journal of Finance*, 1961. Vol. 16. No. 1. P. 8–37.

Автор: Александр Петрович Горяшко, д. т. н., профессор, профессор кафедры информатики и автоматизации Московского технологического института «ВТУ».

Game Theory: From Analysis to Synthesis (Survey of the Markets Design Results)

A. Goryashko

Moscow Technological Institute

38A, Leninskiy prospect, Moscow, Russia, 119334

Abstract. The article is centered around most intriguing results concerning algorithmic game theory and markets design. In particular, this survey is focused on large computer networks such as Internet which is used by a large number of diverse and competitive entities. The main challenge in the area of algorithmic game theory is to understand what principles of interaction make independent participants to form efficient networks. Another goal is to mention the original approach for competitive analysis problems for Colonel Blotto game. In particular, one of the most important results should consider the fact that in such systems common good is often achievable without the intervention of a single governing body ("dictator"). In the review a number of significant results in recent years related to a relatively new section of the theory are also mentioned, namely design of markets section where first results were obtained solutions to practical problems of the economy.

Keywords: noncooperative games; Nash equilibria; algorithmic game theory; untractable problems; design mechanisms; congestion games; Shapley cost-sharing, competitive analysis, Blotto game, price of anarchy; price of stability.

Reference

- [1] Algorithmic game theory / Ed.: N. Nisan. — Cambridge Univ. Press, 2007.
- [2] Arrow K. J. A difficulty in the concept of social welfare // Journal of Political Economy. 1950. Vol. 58. No. 4 (August). P. 328–346.
- [3] Babaioff M., Chuang J., Feldman M. Incentives in peer-to-peer systems // Algorithmic game theory / Ed.: N. Nisan et al. — Cambridge Univ. Press, 2007.
- [4] Ben-Tal A., Ghaoui L. El., Nemirovski A. Robust optimization.— Princeton University Press, 2009.
- [5] Borel E. La theorie du jeu les equations integrales a noyau symetrique // Comptes Rendus del Academie. 1921. Vol. 173. No.19. P. 1304–1308 (English translation by Savage L.: The Theory of Play and Integral Equations with Skew Symmetric Kernels // Econometrica, 1953. Vol. 21. No. 1. P. 97–100.
- [6] Braess D., Nagurney A., Wakolbinger T. On a paradox of traffic planning // Transportation science. 2005. Vol. 39. No. 4. P. 446-450.
- [7] Bulow J., Klemperer P. Auctions versus negotiations // The American Economic Review. 1996. Vol. 86. No. 1. P.180–194.
- [8] Dynkin E. B. Optimal'nyj vybor momenta ostanovki markovskogo processa // Dokl. AN SSSR. 1963. Vol. 150. No. 2. P. 238–240.

- [9] *El-Yaniv R.* Competitive solutions for online financial problems // *ACM Computing Surveys*. 1998. Vol. 30. No. 1. P. 28–69. (doi: 10.1145/274440.274442)
- [10] *Fabricant A. et al.* On a network creation game // *Proc. of the twenty-second annual symposium on Principles of distributed computing PODC'03*. — NY: ACM, 2003. P. 347–351. (doi: 10.1145/872035.872088).
- [11] *Feigenbaum J., Papadimitriou C. H., Shenker S.* Sharing the cost of multicast transmissions // *Journal of Computer and System Sciences*. 2001. Vol. 63. No. 1. P. 21–41. (doi: 10.1006/jcss.2001.1754).
- [12] *Friedman E. J., Halpern J. Y., Kash I.* Efficiency and Nash equilibria in a scrip system for p2p network // *Proc. 7th ACM conference on Electronic commerce*. — NY: ACM, 2006. P.140–149. (doi: 10.1145/1134707.1134723).
- [13] *Golman R., Page S. E.* General Blotto: games of allocative strategic mismatch // *Public Choice*. 2009. Vol. 138. No. 3-4. P. 279–299. (doi: 10.1007/s11127-008-9359-x).
- [14] *Hurwicz L.* On informationally decentralized systems // *Decision and optimization*. Ed.: B. McGuire, B. Radner.— Amsterdam: North-Holland, 1972.
- [15] *Jackson M., Wolinsky A.* A strategic model of social and economic networks // *Journal of Economic Theory*. 1996. Vol. 71. No. 1. P. 44–74. (doi: 10.1006/jeth.1996.0108).
- [16] *Klemperer P.* Auctions: Theory and Practice.— Princeton University Press, 2004.
- [17] *McKinsey J. C. C.* Introduction to the Theory of Games. — NY: McGraw-Hill, 1952.
- [18] *Milgrom P.* Game theory and the spectrum auctions // *European Economic Review*. 1998. Vol. 42. No. 3–5. P. 771–778. (doi: 10.1016/S0014-2921(97)00146-3).
- [19] *Monderer D., Shapley L.S.* Potential games // *Games and Economic Behavior*. 1996. No. 14. P. 124–143.
- [20] *Myerson R. B.* Optimal auction design // *Math. Oper. Res.* 1981. Vol. 6. No. 1. P.58–73.
- [21] *Nash J.* The bargaining problem // *Econometrica*. 1950. Vol. 18. No. 4. P.155–162.
- [22] *Neuman J., Morgenshtern O.* Theory of games and economic behavior. Princeton Univers. Press 1944.
- [23] *Pennock D. Sami R* Computational Aspects of Prediction Markets // *Algorithmic game theory* / Ed.: No. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. V. Vazirani. Chap 26.— Cambridge University Press, 2007. P. 651–676.
- [24] *Roberson B.* The Colonel Blotto game // *Economic Theory*. 2006. Vol. 29. No. 1. P. 1–24. (doi: 10.1007/s00199-005-0071-5)
- [25] *Rosental R. W.* A Class of games possessing Pure-Strategy Nash Equilibria // *Int. J. Game Theory*. 1973. No. 2. P. 65–67.
- [26] *Roth A. E.* Game Theory as a Tool for Market Design Game Practice // *Contributions from Applied Game Theory. Theory and Decision Library*. 2000. Vol. 23. P. 7–18. (doi: 10.1007/978-1-4615-4627-6_2).

- [27] *Roth A. E.* The Evolution of the labor market for medical interns and residents: A Case study in game theory // *Journal of Political Economy*. 1984. Vol. 92. No. 6. P. 991–1016.
- [28] *Sakaguchi M.* Optimal stopping games: A review // *Math. Japonica*. 1995. Vol. 42. No. 2. P. 343–351.
- [29] *Tardos E., Wexler T.* Network formation games and the potential function method // *Algorithmic game theory*. Eds.: N. Nisan, T. Roughgarden, É. Tardos, V. V. Vazirani. Chap. 19. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. P.487–516.
- [30] *Vickrey W.* Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders // *The Journal of Finance*, 1961. Vol. 16. No. 1. P. 8–37.