

Коррекция величин углов наклона радиус-вектора фокуса к координатным осям в бицентрическом монофокусном полупространстве

Е. А. Котова

Рязанский государственный радиотехнический университет
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1
e-mail: katekotova_86@mail.ru

Аннотация. Производится классификация задач построения интерактивной визуальной модели бицентрического монофокусного полупространства (БМП). Выделяется класс задач поиска неизвестных параметров фокусного эллипсоида. Решается задача коррекции двух углов из трех между радиус-вектором фокуса и координатными осями в БМП, которая является одной из наиболее важных и сложных для построения интерактивной компьютерной модели БМП.

Ключевые слова: бицентрическое монофокусное полупространство (БМП), интерактивная модель, фокусный эллипсоид, радиус-вектор фокуса, направляющие косинусы, угол наклона вектора к оси.

1. Введение

Бицентрическое монофокусное полупространство (БМП) — субъективная модель представления традиционного трехмерного пространства человеческим сознанием. Человек обладает *бинокулярным зрением*, и интерпретацией глаз в БМП выступает пара *центров*. Человек может воспринимать лишь часть пространства перед своими глазами — эта часть является *полупространством*. Обоими глазами человек всегда наблюдает одну точку, а именно *точку фокуса*.

Радиус-вектор фокуса — вектор с точкой приложения в начале координат и концом в точке фокуса [1]. Зрительные центры образуют концентрические полуэллипсоиды — *зрительные*, или *фокусные*, *полуэллипсоиды* (далее просто *эллипсоиды*). *Радиусы* эллипсоида — это его *полуоси*, принадлежащие соответствующим координатным осям *OX*, *OY* и *OZ* [1].

Каждая точка пространства находится в ареале, контролируемом в большей степени одним из зрительных центров или обоими приблизительно в равной степени. В связи с этим выделяются *3 области* точек пространства, над которыми в процессе их обозрения доминируют зрительные центры. Это *области зрительных приоритетов*, или *LOR-области* [2].

Для визуализации парадигмы БМП-подхода была построена интерактивная трехмерная компьютерная модель *Glance* [3], реализация которой охватывает круг

прикладных задач аналитической геометрии на плоскости и в пространстве. Эти задачи делятся на 4 класса:

- определение параметров каркасной линии зрительного эллипсоида;
- расчет параметров фокусного эллипсоида [4];
- нахождение зрительной области точки БМП [2];
- параллельный перенос точки в БМП [1].

Наиболее важным классом задач, обеспечивающим интерактивность экспериментальной модели БМП, является второй, определяющий неизвестные параметры фокусного эллипсоида [4].

2. Класс задач поиска неизвестных параметров фокусного эллипсоида

Исходные данные. Дан фокусный эллипсоид E с полуосями a , b и c . При этом, a — радиус по оси OX ($a \geq 0$), b — радиус по оси OY ($b \geq 0$), c — радиус по оси OZ ($c \geq 0$) и, кроме того, $b = c$ (рис. 1).

Фокусный эллипсоид E имеет два центра — правый и левый, расположенные на оси OX на равном расстоянии d от начала координат (см. рис. 1). Правый с координатами $(d; 0; 0)$ находится на положительной полуоси OX , а левый — на отрицательной, и его координаты: $(-d; 0; 0)$. Известно расстояние между этими центрами — межцентровое расстояние $2d$.

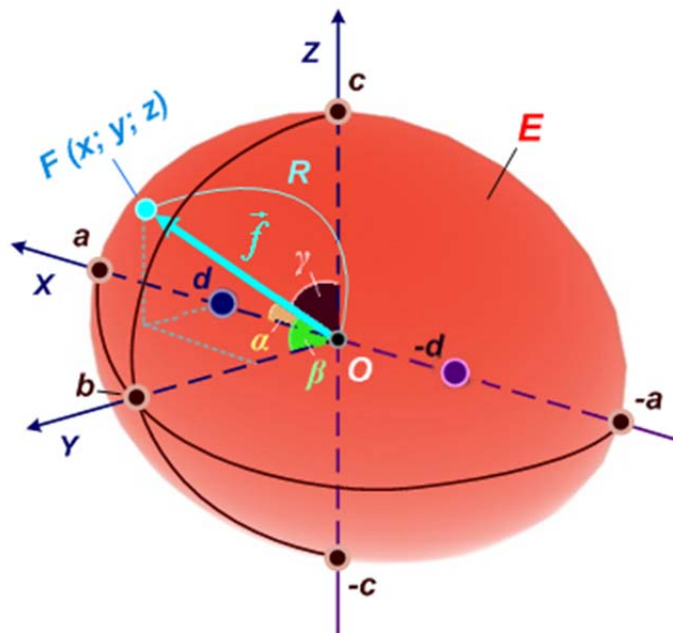


Рисунок 1. Фокусный эллипсоид

Эллипсоид E образован точкой фокуса F с координатами $(x; y; z)$, лежащей на его поверхности. От начала координат O до точки F проходит радиус-вектор фокуса \mathbf{f} , длина которого равна R ($R = |\mathbf{f}|$). Он составляет углы α , β и γ с координатными осями OX , OY и OZ соответственно, что отражено в соотношениях (1):

$$\begin{aligned}\alpha &= \angle FOX = (\mathbf{f}; \widehat{OX}), \\ \beta &= \angle FOY = (\mathbf{f}; \widehat{OY}), \\ \gamma &= \angle FOZ = (\mathbf{f}; \widehat{OZ}).\end{aligned}\tag{1}$$

Параметрами фокусного эллипсоида E являются:

- межцентровое расстояние $2d$;
- радиусы a, b, c ($b = c$).

Параметры фокуса F :

- координаты его точки $(x; y; z)$;
- длина радиус-вектора $R = |\mathbf{f}|$;
- углы α, β и γ из соотношений (1) между радиус-вектором \mathbf{f} и осями координат OX, OY и OZ соответственно.

Параметры фокуса F и фокусного эллипсоида E оказывают влияние друг на друга: для фокусного эллипсоида E параметры фокуса F являются косвенными при расчете его собственных параметров и, наоборот, на параметры фокуса F воздействуют параметры фокусного эллипсоида E [5].

Таким образом, совокупность этих параметров БМП можно рассматривать как систему фокус-эллипсоид, которая считается определенной при условии, что все ее параметры известны [5].

Цель. Используя известные значения параметров системы фокус-эллипсоид, необходимо найти ее недостающие параметры для обеспечения полного функционирования этой системы.

Конкретные задачи. В зависимости от того, какие параметры системы фокус-эллипсоид известны [6], а какие нет, формулируются следующие 4 частные задачи.

1. Расчет неизвестных параметров по координатам точки фокуса $F(x; y; z)$ и межцентровому расстоянию $2d$.

2. Расчет координат точки фокуса $F(x; y; z)$ и длины R радиус-вектора \mathbf{f} по радиусам $a, b = c$ фокусного эллипсоида E и углам α, β и γ между радиус-вектором \mathbf{f} и соответствующим осям.

3. Расчет по межцентровому расстоянию $2d$ и одному известному радиусу из трех — a, b или c — зрительного эллипсоида E двух его неизвестных радиусов.

4. Коррекция величин двух углов из трех — α, β, γ — между радиус-вектором \mathbf{f} фокуса F и координатными осями после установки нового значения для третьего угла.

Наиболее сложной и спорной среди этих задач является последняя.

3. Задача коррекции величин двух углов из трех между радиус-вектором фокуса и координатными осями после установки нового значения для третьего угла

Исходные данные задачи. Среди трех углов (α, β, γ) между радиус-вектором \mathbf{f} фокуса F и координатными осями (OX, OY, OZ соответственно) был изменен один, величина которого считается известной (см. рис. 1).

Цель задачи. Необходимо откорректировать значения двух других углов, изменений над которыми не проводилось, таким образом, чтобы выполнялось основное свойство направляющих косинусов [1] радиус-вектора \mathbf{f} (см. рис. 1).

Разбор условий задачи. Основопологающим является вопрос о способе измерения угла наклона радиус-вектора \mathbf{f} к координатной оси [7].

Возьмем радиус-вектор фокуса \mathbf{f} и произвольную систему координат со взаимно перпендикулярными координатными осями $OM \perp ON \perp OH$ [6]. Измерим угол δ наклона радиус-вектора \mathbf{f} фокуса F к оси координат OM : $\delta = \angle FOM = \widehat{(\mathbf{f}; OM)}$. При этом радиус-вектор \mathbf{f} и ось OM лежат в одной плоскости S : $(OF \cap OM) \in S$ (рис. 2).

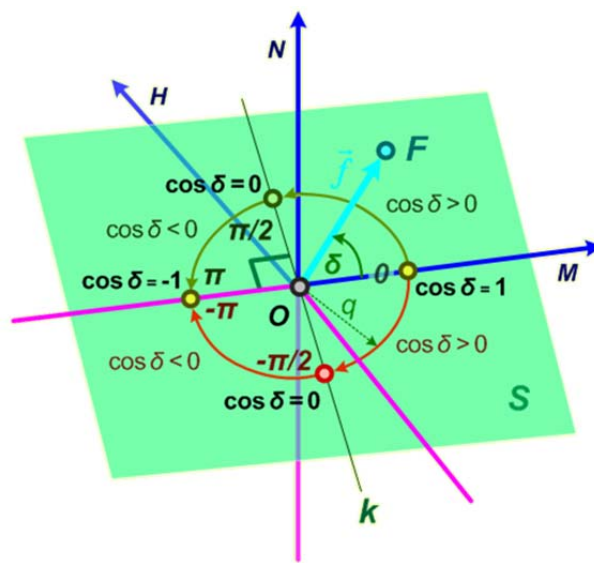


Рисунок 2. Угол δ наклона радиус-вектора к оси OM

Изобразим в плоскости S окружность с центром в начале координат O с ненулевым радиусом q , не превышающим длину $R = |\mathbf{f}|$ радиус-вектора \mathbf{f} : $0 < q \leq R$. Примем за начало отсчета для измерения угла δ неотрицательное направление оси OM — неотрицательную полуось OM . Продвигаясь от нее по окружности с радиусом q против часовой стрелки (если положительная полуось OM справа, а положительная полуось ON — вверх), достигнем радиус-вектора \mathbf{f} . Полученная траекто-

рия иллюстрирует способ измерения угла δ , образующегося между неотрицательной полуосью OM и радиус-вектором \mathbf{f} . В этом случае величина угла — положительная. Аналогично строится угол, имеющий отрицательное значение с той лишь разницей, что движение происходит по часовой стрелке, а не против нее.

Получается, что полная окружность составляет 360° . При построении угла больше 2π нужно пройти по окружности с радиусом q угловой путь, равный $2\pi N + \delta_1 = \delta$, где N — число полных окружностей, укладываемых в угол δ , δ_1 — оставшаяся часть от угла δ после прохождения этих окружностей, недотягивающая до полной окружности: $0 \leq \delta_1 < 2\pi$ [6].

Пусть исследуемый угол δ будет углом, указанным в условии задачи в качестве известного, т. е. того, над которым произвели некоторые изменения (им может оказаться α , β или γ). В задаче подразумевается, что изменение над этим углом δ произвел пользователь, следовательно, он хочет, чтобы данные, введенные им, сохранились. То есть этот угол надо считать постоянным ($\delta = const$), а корректировать только два оставшихся угла, назовем их σ — угол между радиус-вектором \mathbf{f} и осью ON : $\sigma = \angle FON = (\mathbf{f}; \widehat{ON})$; ρ — угол между радиус-вектором \mathbf{f} и осью OH : $\rho = \angle FOH = (\mathbf{f}; \widehat{OH})$.

Основное свойство направляющих косинусов [1], необходимое для расчета двух остальных углов, σ и ρ , наклона радиус-вектора \mathbf{f} к координатным осям ON и OH соответственно, использует косинусы углов δ , σ и ρ . Функция косинуса является периодической с периодом 2π и четной: $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$, где φ — некоторый угол [8]. То есть эта функция является симметричной относительно оси координат, вдоль которой откладываются значения функции [8].

Полный круг окружности с радиусом q на рис. 2 составляет как раз угловой путь 2π — период функции косинуса. Половина круга отводится под отрицательные значения углов, таким образом, значения косинуса рассматриваются на интервале $(-\pi; \pi)$ (или $[-\pi; \pi)$) [8]. Значения всех углов δ , σ и ρ должны быть приведены к этому интервалу для наглядности.

Косинус — четная функция [8], поэтому для угла δ на рис. 2 $\cos(-\delta) = \cos(\delta)$, т. е. значения косинусов углов, симметричных относительно оси OM и равных по модулю, будут равны, например, $\cos(-\pi/6) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, а $\cos(-\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$. Значит, обобщенно для угла, приведенного к диапазону $(-\pi; \pi)$ знак не важен, существенен только его модуль для вычисления косинуса: $\cos(\varphi) = \cos(|\varphi|)$, где φ — некоторый угол. Тогда от знака угла можно избавиться вообще, представив угол на отрезке $[0; \pi]$.

С другой стороны, именно знак угла на интервале $(-\pi; \pi]$ показывает, в каком квадранте, в каком октанте [9] располагает радиус-вектор \mathbf{f} , составляющий данный угол с заданной координатной осью. Однако есть целых три оси — OM , ON и OH , — чтобы охарактеризовать направление радиус-вектора \mathbf{f} в пространстве. Докажем, что направление радиус-вектора \mathbf{f} однозначно определено, если каждый из углов δ ,

σ и ρ по осям OM , ON и OH , соответственно, имеет значение в пределах отрезка $[0; \pi]$.

На рис. 3 изображены произвольно пронумерованные римскими цифрами октанты [9], на которые делится трехмерное пространство взаимно перпендикулярными осями $OM \perp ON \perp OH$. Небольшими условными точками отмечены положительные направления осей OM , ON и OH , с которых начинается отсчет величин углов δ , σ и ρ соответственно. Изогнутые стрелки показывают направления измерений величин этих углов. Соответствие номеров октантов (см. рис. 3) знакам координат точек пространства (m , n и h — координаты по осям OM , ON и OH) и диапазонам изменения углов δ , σ и ρ приведены в (2).

$$\begin{aligned}
 I &\Rightarrow \begin{cases} m > 0, \\ n > 0, \\ h > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta \in (0; \pi/2), \\ \sigma \in (0; \pi/2), \\ \rho \in (0; \pi/2); \end{cases} \\
 II &\Rightarrow \begin{cases} m < 0, \\ n > 0, \\ h > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta \in (\pi/2; \pi), \\ \sigma \in (0; \pi/2), \\ \rho \in (0; \pi/2); \end{cases} \\
 III &\Rightarrow \begin{cases} m < 0, \\ n > 0, \\ h < 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta \in (\pi/2; \pi), \\ \sigma \in (0; \pi/2), \\ \rho \in (\pi/2; \pi); \end{cases} \\
 IV &\Rightarrow \begin{cases} m > 0, \\ n > 0, \\ h < 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta \in (0; \pi/2), \\ \sigma \in (0; \pi/2), \\ \rho \in (\pi/2; \pi); \end{cases} \\
 V &\Rightarrow \begin{cases} m > 0, \\ n < 0, \\ h > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta \in (0; \pi/2), \\ \sigma \in (\pi/2; \pi), \\ \rho \in (0; \pi/2); \end{cases} \\
 VI &\Rightarrow \begin{cases} m < 0, \\ n < 0, \\ h > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta \in (\pi/2; \pi), \\ \sigma \in (\pi/2; \pi), \\ \rho \in (0; \pi/2); \end{cases} \\
 VII &\Rightarrow \begin{cases} m < 0, \\ n < 0, \\ h < 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta \in (\pi/2; \pi), \\ \sigma \in (\pi/2; \pi), \\ \rho \in (\pi/2; \pi); \end{cases} \\
 VIII &\Rightarrow \begin{cases} m > 0, \\ n < 0, \\ h < 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta \in (0; \pi/2), \\ \sigma \in (\pi/2; \pi), \\ \rho \in (\pi/2; \pi). \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Из (2) видно, что каждый октант имеет уникальную тройку диапазонов углов δ , σ и ρ ровно так же, как и неповторяющуюся группу знаков координат m , n и h точек

пространства. Очевидно, что при $u > 0$ будет $\varphi \in (0; \pi/2)$ а при $u < 0$ — $\varphi \in (\pi/2; \pi)$, где u — координата по некоторой оси, OM , ON или OH , φ — угол (δ , σ или ρ) наклона радиус-вектора \mathbf{f} к соответствующей оси координат. Таким образом, измерение углов δ , σ и ρ в пределах отрезка $[0; \pi]$ вполне резонно [8].

На рис. 2 угол δ рассматривается как известный. Угол ρ между радиус-вектором \mathbf{f} и осью OH можно найти из основного свойства направляющих косинусов [1]. Но как тогда поступить с углом σ ?

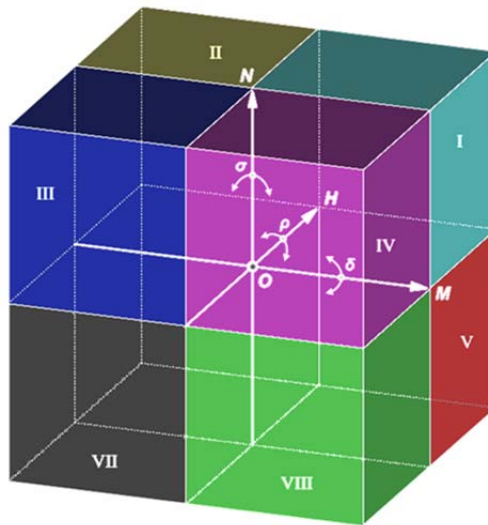


Рисунок 3. Октанты

В задаче предполагается, что пользователь ввел значение угла δ в то время, как σ и ρ уже имели некоторые значения. Проверить актуальность величины угла σ между радиус-вектором \mathbf{f} и осью ON можно, оценив диапазон его изменения, и, если угол σ выходит за положенные ему границы, то его значение можно попросту приравнять к одному из пограничных.

Множества значений угла σ показаны на рис. 4. Поскольку $\delta \in [0; \pi]$, рассмотрим два случая [10], представленные в (3).

$$\begin{cases} \delta \in [0; \pi], \\ \sigma \in [0; \pi]; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = \delta^I \in [0; \pi/2], \\ \sigma = \sigma^I; \\ \delta = \delta^{II} \in (\pi/2; \pi], \\ \sigma = \sigma^{II}; \end{cases} \quad (3)$$

где δ — постоянный угол, заданный пользователем; δ^I и δ^{II} — величины, выражающие постоянные значения угла δ в случаях его попадания в диапазоны $[0; \pi/2]$ и $(\pi/2; \pi]$ соответственно; σ — изменяющийся угол, чье значение оценивается по

критерию принадлежности диапазону допустимых значений; σ^I и σ^{II} — величины, выражающие переменные значения угла σ в случаях равенства угла δ значениям δ^I и δ^{II} соответственно.

Зафиксировав угол δ , радиус-вектор \mathbf{f} вращается вокруг оси OM [7], в результате чего получается однополостная коническая поверхность [9]. На рис. 4 таких поверхностей две: справа — для угла δ^I и слева — для угла δ^{II} . Для примера показаны способы измерения углов δ^I , δ^{II} (отображены черными изогнутыми стрелками) и σ^I , σ^{II} (выделены желтыми изогнутыми стрелками) в плоскости MON [10].

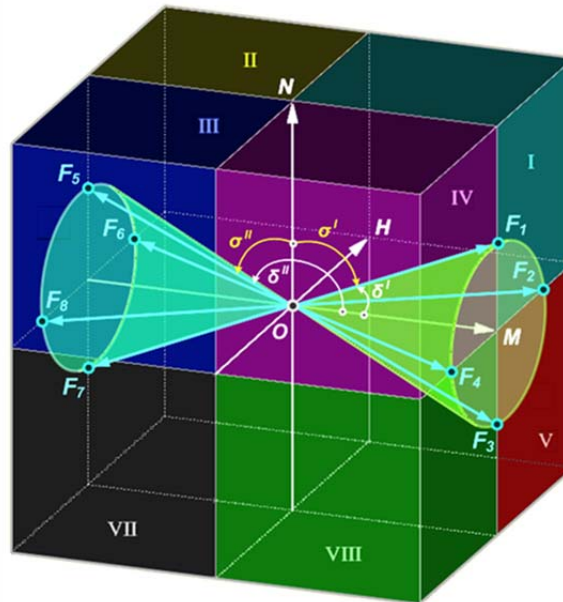


Рисунок 4. Множества значений угла δ

В (4) определим значения угла σ на границах октантов (рис. 3, 4). Для этого изобразим положения радиус-вектора \mathbf{f} фокуса F , составляющего с осью OM фиксированный угол δ , на границах октантов [10]. Для случаев $\delta = \delta^I$ и $\delta = \delta^{II}$ получится 8 контрольных точек фокуса: $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8$ (см. рис. 4), каждой из которых соответствует своя тройка углов δ_i , σ_i и ρ_i ($i = \overline{1, 8}$) наклона радиус-вектора \mathbf{f} фокуса F_i к координатным осям OM , ON и OH соответственно [10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta^I \in [0; \pi/2], \\ \delta_5 = \delta_6 = \delta_7 = \delta_8 = \delta^{II} \in (\pi/2; \pi], \\ \sigma_1 = \pi/2 - \delta_1 = \pi/2 - \delta^I, \\ \sigma_2 = \pi/2, \\ \sigma_3 = \pi/2 + \delta_3 = \pi/2 + \delta^I, \\ \sigma_4 = \pi/2, \\ \sigma_5 = \delta_5 - \pi/2 = \delta^{II} - \pi/2, \\ \sigma_6 = \pi/2, \\ \sigma_7 = 3\pi/2 + \delta_7 = 3\pi/2 + \delta^{II}, \\ \sigma_8 = \pi/2; \end{array} \right. \quad (4)$$

где δ^I и δ^{II} — величины, выражающие постоянные значения угла δ в случаях его попадания в диапазоны $[0; \pi/2]$ и $(\pi/2; \pi]$ соответственно; δ_i и σ_i — углы наклона радиус-вектора фокуса OF_i к координатным осям OM , и ON ($i = \overline{1,8}$).

Между полученными пограничными значениями угла σ , представленными в (5), становится легко определить области его допустимых значений во всех октантах [10]:

$$\left[\begin{array}{l} I \Rightarrow \sigma \in [\sigma_1; \sigma_2] \Rightarrow \sigma \in [\pi/2 - \delta^I; \pi/2], \\ II \Rightarrow \sigma \in [\sigma_5; \sigma_6] \Rightarrow \sigma \in [\delta^{II} - \pi/2; \pi/2], \\ III \Rightarrow \sigma \in [\sigma_5; \sigma_8] \Rightarrow \sigma \in [\delta^{II} - \pi/2; \pi/2], \\ IV \Rightarrow \sigma \in [\sigma_1; \sigma_4] \Rightarrow \sigma \in [\pi/2 - \delta^I; \pi/2], \\ V \Rightarrow \sigma \in [\sigma_2; \sigma_3] \Rightarrow \sigma \in [\pi/2; \pi/2 + \delta^I], \\ VI \Rightarrow \sigma \in [\sigma_6; \sigma_7] \Rightarrow \sigma \in [\pi/2; 3\pi/2 - \delta^{II}], \\ VII \Rightarrow \sigma \in [\sigma_8; \sigma_7] \Rightarrow \sigma \in [\pi/2; 3\pi/2 - \delta^{II}], \\ VIII \Rightarrow \sigma \in [\sigma_4; \sigma_3] \Rightarrow \sigma \in [\pi/2; \pi/2 + \delta^I]. \end{array} \right. \quad (5)$$

По рис. 4 и соотношениям (4) видно, что октанты I , IV , V и $VIII$ относятся к случаю $\delta = \delta^I$, а II , III , VI и VII — к случаю $\delta = \delta^{II}$.

В итоге при выходе угла σ за границы, установленные в (5), его значение изменится на одно из допустимых пограничных величин.

Формулировка задачи в общем виде. Пусть координатные оси называются OM , ON и OH (см. рис. 3). Известен угол δ наклона радиус-вектора \mathbf{f} фокуса F к оси OM , $\delta = \angle FOM = (\mathbf{f}; \widehat{OM})$, показанный на рис. 2. Также дано предварительное значение угла σ между радиус-вектором \mathbf{f} и осью ON : $\sigma = \angle FON = (\mathbf{f}; \widehat{ON})$ (см. рис. 4).

Обобщенная цель задачи. Следует уточнить значение угла σ , чтобы оно не выходило за соответствующие допустимые границы. Угол ρ между радиус-вектором фокуса \mathbf{f} и осью OH , $\rho = \angle FOH = (\mathbf{f}; \overline{OH})$, надо пересчитать по свойству направляющих косинусов [1].

Частные случаи задачи. Эта задача имеет 3 случая. Углы наклона радиус-вектора \mathbf{f} фокуса F к координатным осям определяются в зависимости от того, каким реальным осям OX , OY и OZ соответствуют оси OM , ON и OH [6].

Следует помнить, что БМП — полупространство, поэтому координаты по оси ординат всегда будут неотрицательными: $y \geq 0$ [11]. Значит, в БМП существует всего 4 октанта из 8 [9], что показано на рис. 5, где эти октанты пронумерованы римскими цифрами по принципу распределения индексов октантов на рис. 3 для системы координат MNH [10].

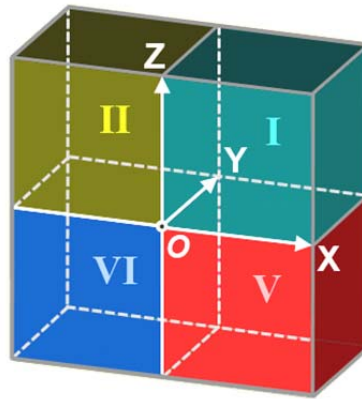


Рисунок 5. Четыре октанта БМП

Случаи сопоставления систем координат XYZ и MNH :

$$W_1 = \begin{cases} OM = OX, \\ ON = OZ, \\ OH = OY; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{XYZ} = I_{MNH}, \\ II_{XYZ} = II_{MNH}, \\ V_{XYZ} = V_{MNH}, \\ VI_{XYZ} = VI_{MNH}, \\ \alpha = \delta - \text{известен}, \\ \beta = \rho - \text{вычисляется}, \\ \gamma = \sigma - \text{проверяется}; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 W_2 = \begin{cases} OM = OY, \\ ON = OX, \\ OH = OZ; \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} I_{XYZ} = I_{MNH}, \\ II_{XYZ} = V_{MNH}, \\ V_{XYZ} = IV_{MNH}, \\ VI_{XYZ} = VIII_{MNH}, \\ \alpha = \sigma - \text{проверяется}, \\ \beta = \delta - \text{известен}, \\ \gamma = \rho - \text{вычисляется}; \end{cases} \\
 W_3 = \begin{cases} OM = OZ, \\ ON = OY, \\ OH = OX; \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} I_{XYZ} = I_{MNH}, \\ II_{XYZ} = IV_{MNH}, \\ V_{XYZ} = II_{MNH}, \\ VI_{XYZ} = III_{MNH}, \\ \alpha = \rho - \text{вычисляется}, \\ \beta = \sigma - \text{проверяется}, \\ \gamma = \delta - \text{известен}; \end{cases}
 \end{aligned} \tag{6}$$

где W_i ($i = \overline{1, 3}$) — один из трех случаев: 1) $R1_{XYZ} = R2_{MNH}$ — сопоставление октантов систем координат XYZ и MNH ; 2) $R1_{XYZ}$ — октант в системе координат XYZ ; 3) $R2_{MNH}$ — октант в системе координат MNH . Здесь $R1$ и $R2$ — римские цифры, обозначающие индексы октантов на рис. 5 и 3 соответственно.

Следует отметить, что в каждом из трех случаев [5] из (6) октанты системы координат MNH , которые не были сопоставлены октантам XYZ , исключаются [10], потому что их не существует в БМП.

Решение задачи в общем виде. Сначала оба заданных угла — δ и σ — преобразуются к отрезку $[0; \pi]$, что резонно, исходя из (2):

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & \phi_0 \geq 0, \\ & \phi_1 = \phi_0; \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} & \phi_0 < 0, \\ & \phi_1 = \phi_0 + 2\pi; \end{aligned} \right. \\ & N = \left[\frac{\phi_1}{2\pi} \right], \\ & \phi_2 = \phi_1 - 2\pi N \in [0; 2\pi), \\ & \left\{ \begin{aligned} & \phi_2 \in [0; \pi], \\ & \phi_3 = \phi_2; \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} & \phi_2 \in (\pi; 2\pi), \\ & \phi_3 = 2\pi - \phi_2; \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

где φ — угол δ или σ , преобразуемый к отрезку $[0; \pi]$; φ_0 — заданное по условию первоначальное значение угла φ ; φ_1 — промежуточная величина угла φ , исключающая его отрицательные значения; N — целое число периодов 2π , укладывающихся в значение угла φ_1 — целая часть от деления φ_1 на 2π ; φ_2 — величина угла φ , преобразованного к интервалу $[0; 2\pi)$; φ_3 — угол φ , преобразованный к отрезку $[0; \pi]$, согласно принципу, показанному на рис. 3 и в (2).

Согласно (2), направление радиус-вектора \mathbf{f} однозначно определено, если каждый из углов δ , σ и ρ , по осям OM , ON и OH , соответственно имеет значение в пределах отрезка $[0; \pi]$, что было достигнуто в результате коррекции углов δ и σ в (7). Теперь надо проверить принадлежность угла σ области его допустимых значений относительно угла δ .

Расчет осуществляется с использованием соотношений (8), вытекающих из (2), (4) и (5) (римские цифры обозначают октанты, показанные на рис. 3 и 4):

$$\left[\begin{array}{l} \text{I, IV} \Rightarrow \begin{cases} m > 0, \\ n > 0, \\ \delta \in [0; \pi/2], \\ \sigma \in [\pi/2 - \delta; \pi/2]; \end{cases} \\ \text{V, VIII} \Rightarrow \begin{cases} m > 0, \\ n < 0, \\ \delta \in [0; \pi/2], \\ \sigma \in [\pi/2; \pi/2 + \delta]; \end{cases} \\ \text{II, III} \Rightarrow \begin{cases} m < 0, \\ n > 0, \\ \delta \in [\pi/2; \pi], \\ \sigma \in [\delta - \pi/2; \pi/2]; \end{cases} \\ \text{VI, VII} \Rightarrow \begin{cases} m < 0, \\ n < 0, \\ \delta \in [\pi/2; \pi], \\ \sigma \in [\pi/2; 3\pi/2 - \delta]; \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta \in [0; \pi/2], \\ \sigma \in [\pi/2 - \delta; \pi/2 + \delta]; \\ \delta \in [\pi/2; \pi], \\ \sigma \in [\delta - \pi/2; 3\pi/2 - \delta]; \end{array} \right. \quad (8)$$

Из (8) следует, что при нормализации угла σ важны только два случая принадлежности угла δ диапазонам $[0; \pi/2]$ и $(\pi/2; \pi]$.

Таким образом, совокупность (8) оказалась приведенной к виду (3), иллюстрация которого — на рис. 4. Если угол σ выходит за границы диапазонов, выведенных в соответствии с (8), то его следует приравнять к некоторому пограничному значению.

Совокупность (5), подробно описывающая диапазоны изменения угла σ в каждом из восьми октантов, указывает, что одним из двух экстремальных значений уг-

ла σ всегда является $\pi/2$, значит, именно это величина может стать значением по умолчанию, присваиваемым углу σ в случае, когда он покидает препоставленный ему диапазон изменения.

Тогда (8) можно уточнить как:

$$\left[\left[\left[\begin{cases} \delta \in [0; \pi/2], \\ \sigma \in [\pi/2 - \delta; \pi/2 + \delta]; \end{cases} \right. \right. \right. \left. \left. \left. \begin{cases} \delta \in (\pi/2; \pi], \\ \sigma \in [\delta - \pi/2; 3\pi/2 - \delta]; \end{cases} \right. \right. \right. \left. \left. \begin{cases} \sigma_n = \sigma; \\ \sigma_n = \pi/2; \end{cases} \right. \right. \right. \quad (9)$$

где σ_n — нормализованное значение угла σ , находящееся в пределах области его допустимых значений.

В конце угол ρ между радиус-вектором фокуса \mathbf{f} и осью OH ($\rho = \angle FOH = \widehat{(\mathbf{f}; OH)}$) рассчитывается по свойству направляющих косинусов [1]:

$$\cos^2 \delta + \cos^2 \rho + \cos^2 \sigma = 1 \Leftrightarrow \rho = \arccos \sqrt{1 - \cos^2 \delta - \cos^2 \sigma}. \quad (10)$$

Обобщенный ответ задачи с учетом трех случаев из (6) состоит из (7), (9) и (10).

Решение частных случаев задачи. Рассмотрим случаи (6) подробнее.

Из (2) следует, что, если радиус-вектор фокуса \mathbf{f} принадлежит октанту, где направление некоторой оси координат U не является отрицательным ($u \geq 0$ — координата точки фокуса F по оси U), то угол ϕ ($\phi \in [0; \pi]$ — нормализуется в соответствии с (7)) наклона радиус-вектора \mathbf{f} к оси U будет принадлежать отрезку $[0; \pi/2]$, а при $u < 0$ выходит, что $\phi \in (\pi/2; \pi]$.

Ось ординат OY представлена только своей неотрицательной полуосью [11]: $y \geq 0$, значит, с учетом доказательств для (2) угол β наклона радиус-вектором \mathbf{f} фокуса F к координатной оси OY всегда будет принадлежать диапазону $[0; \pi/2]$.

Тогда в частных случаях (6) совокупность (9) должна корректироваться, если угол β будет сопоставлен одному из упоминаемых в ней углов — δ или σ . Это отражает совокупность (11):

$$W_1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \delta, \\ \beta = \rho, \\ \gamma = \sigma; \end{cases} \Rightarrow \left[\left[\left[\begin{cases} \alpha \in [0; \pi/2], \\ \gamma \in [\pi/2 - \alpha; \pi/2 + \alpha]; \end{cases} \right. \right. \right. \left. \left. \left. \begin{cases} \alpha \in (\pi/2; \pi], \\ \gamma \in [\alpha - \pi/2; 3\pi/2 - \alpha]; \end{cases} \right. \right. \right. \left. \left. \begin{cases} \gamma_n = \gamma; \\ \gamma_n = \pi/2; \end{cases} \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 W_2 &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \sigma, \\ \beta = \delta, \\ \gamma = \rho; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta \in [0; \pi/2], \\ \alpha \in [\pi/2 - \beta; \pi/2 + \beta]; \\ \alpha_n = \alpha; \\ \alpha_n = \pi/2; \end{cases} \\
 W_3 &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \rho, \\ \beta = \sigma, \\ \gamma = \delta; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{cases} \gamma \in [0; \pi/2], \\ \beta \in [\pi/2 - \gamma; \pi/2]; \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} \gamma \in (\pi/2; \pi], \\ \beta \in [\gamma - \pi/2; \pi/2]; \end{cases} \right. \\ \beta_n = \beta; \\ \beta_n = \pi/2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma \in [0; \pi], \\ \beta \in [|\pi/2 - \gamma|; \pi/2]; \\ \beta_n = \beta; \\ \beta_n = \pi/2; \end{cases} \quad (11)
 \end{aligned}$$

где $W_i (i = \overline{1, 3})$ — один из трех случаев из (6); α_n, β_n и γ_n — нормализованные значения углов α, β и γ соответственно, находящиеся в пределах областей их допустимых значений.

Ответ задачи с учетом трех случаев из (6) состоит из (7), (11) и (10).

4. Заключение

Рассмотренная задача коррекции двух углов из трех между радиус-вектором f фокуса F и координатными осями после установки нового значения для третьего угла пользователем оптимизирует построение радиус-вектора фокуса f фокуса F в интерактивной модели БМП. Точка фокуса F образует фокусный эллипсоид E . БМП представляется множеством концентрических эллипсоидов с общими центрами. Таким образом, решенная задача является одной из наиболее важных для использования в компьютерной модели *Glance* [3], визуализирующей БМП [5].

Литература

- [1] Котова Е. А., Пылькин А. Н. Математическое и компьютерное моделирование человеческого зрительного восприятия объектов // Сборник работ победителей отборочного тура Всероссийского смотра-конкурса научно-технического творчества студентов вузов «ЭВРИКА». — Новочеркасск : ЛИК, 2012. С. 7–10.
- [2] Котова Е. А., Столчнев В. К., Пылькин А. Н. Гипотеза о распределении областей зрительных приоритетов в бицентрическом монофокусном полупространстве // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 4. (www.science-education.ru/118-14454).
- [3] Котова Е. А. Свидетельство № 2014617719 Российская Федерация. *Glance*: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ / заявитель и правообладатель ФГБОУ ВПО Рязанский государственный радиотехнический университет. № 2014615257; заявл. 03.06.2014; зарегистр. 31.07.2014.

- [4] *Nikulchev E. V., Kozlov O. V.* Identification of Structural Model for Chaotic Systems // Journal of Modern Physics. 2013. Vol. 4. No. 10. P. 1381–1392. (doi: 10.4236/jmp.2013.410166)
- [5] *Столчнев В. К., Котова Е. А., Пылькин А. Н.* Анализ результатов экспериментов по искажению смещенной поверхности, получаемых с помощью компьютерной модели бицентрического монофокусного полупространства // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 4. (www.science-education.ru/118-14456).
- [6] *Демидова Л. А., Кираковский В. В., Пылькин А. Н.* Принятие решений в условиях неопределенности. — М. : Горячая линия-Телеком, 2012.
- [7] *Демидова Л. А., Мятлов Г. Н.* Подход к оценке уникальности кусочно-линейных объектов с использованием нечеткой линейной регрессии // Системы управления и информационные технологии. 2013. Т. 51. № 1. С. 85–89.
- [8] *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Прямолинейная тригонометрия : справочник по математике. — 7-е изд., стереотипное. — М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1967. С. 179–184.
- [9] *Александров П. С.* Лекции по аналитической геометрии, дополненные необходимыми сведениями из алгебры с приложением собрания задач, снабженных решениями, составленного А. С. Пархоменко. — М. : Наука, 1968.
- [10] *Демидова Л. А., Мятлов Г. Н.* Методика оценки уникальности фрагментов электронной карты с использованием нечеткой линейной регрессии // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. 2013. № 4 (40). С. 14–26.
- [11] *Котова Е. А., Пылькин А. Н.* Математическая и программная модель параллельного переноса точки в бицентрическом монофокусном полупространстве / под ред. С. Н. Кириллова // Вестник РГРТУ. 2012. Вып. 39–1. С. 55–58.

Автор:

Котова Екатерина Александровна, старший преподаватель кафедры вычислительной и прикладной математики Рязанского государственного радиотехнического университета

Correction of the Angles between the Focal Radius-Vector and the Coordinate Axes in the Bicentric Monofocal Half-Space

Ekaterina A. Kotova

Ryazan state radio engineering university
390005, Gagarina Str, 59/1, Ryazan, Russia
e-mail: katekotova_86@mail.ru

Abstract. The classification of the tasks of building an interactive visual model of the bicentric monofocal half-space (BMHS) is shown. The problem class of focal ellipsoid's unknown parameters searching is regarded. The problem of the correction of the angles between the focal radius-vector and the coordinate axes in BMHS is solved, which is one of the most important and difficult tasks for the interactive computer model of BMHS constructing.

Key words: bicentric monofocal half-space (BMHS), interactive model, focal ellipsoid, focal radius-vector, direction cosines, angle between a vector and an axis.

Reference

- [1] Kotova E. A., Pylkin A. N. (2012) Matematicheskoe i kompyuternoe modelirovanie chelovecheskogo zritel'nogo vospriyatiya obektov. *Sbornik rabot pobeditelej ot-borochnogo tura Vserossijskogo smotra-konkursa nauchno-texnicheskogo tvorchestva studentov vuzov «EVRIKA»*. Novocherkassk, LIK, 7–10. (In Rus.)
- [2] Kotova E. A., Stolchnev V. K., Pylkin A. N. (2014) Gipoteza o raspredelenii oblastej zritelnyx prioritetov v bicentricheskom monofokusnom poluprostranstve. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*, 4. (www.science-education.ru/118-14454) (In Rus)
- [3] Kotova E. A. Svidetelstvo № 2014617719 Rossijskaya Federaciya. Glance: svidetelstvo o gosudarstvennoj registracii programmy dlya EVM. Zayavitel i pravoobladatel Federalnoe gosudarstvennoe byudzhetnoe obrazovatelnoe uchrezhdenie vysshego professionalnogo obrazovaniya «Ryazanskij gosudarstvennyj radio-texnicheskij universitet». № 2014615257; zayavl. 03.06.2014; zaregistr. 31.07.2014. (In Rus)
- [4] Nikulchev E. V., Kozlov O. V. (2013) Identification of Structural Model for Chaotic Systems. *Journal of Modern Physics*, 4(10), 1381–1392. (doi: 10.4236/jmp.2013.410166)
- [5] Stolchnev V. K., Kotova E. A., Pykin A. N. (2014) Analiz rezultatov eksperimentov po iskazheniyu smeshhyonnoj poverxnosti, poluchaemyx s pomoshhyu kompyuternoj modeli bicentricheskogo monofokusnogo poluprostranstva. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*, 4. (www.science-education.ru/118-14456) (In Rus)

- [6] Demidova L. A., Kirakovskij V. V., Pylkin A. N. (2012) Prinjatie reshenij v uslovijah neopredelennosti. *Moscow, Gorjachaja linija-Telekom*. (In Rus)
- [7] Demidova L. A., Mjatov G. N. (2013) Podhod k ocenke unikalnosti kusochno-linejnyh obektov s ispolzovaniem nechetkoj linejnoy regressii. *Sistemy upravlenija i informacionnye tehnologii*, 51(1), 85–89. (In Rus)
- [8] Bronshtejn I. N., Semendyaev K. A. (1967) Pryamolinejnaya trigonometriya. *Moscow, Gosudarstvennoe izdatelstvo texniko-teoreticheskoj literatury*, 179–184. (In Rus)
- [9] Aleksandrov P. S. (1968) Lekcii po analiticheskoj geometrii, popolnennye neobходимymi svedeniyami iz algebry s prilozheniem sobraniya zadach, snabzhennyx resheniyami, sostavlenno A. S. Parxomenko. *Moscow, Nauka*. (In Rus)
- [10] Demidova L. A., Mjatov G. N. (2013) Metodika ocenki unikalnosti fragmentov jelektronnoj karty s ispolzovaniem nechetkoj linejnoy regressii. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta. Serija: Tehničeskie nauki*, 40, 14–26. (In Rus)
- [11] Kotova E. A., Pylkin A. N. (2012) Matematicheskaya i programmaya model paralelnogo perenosa točki v bicentricheskom monofokusnom poluprostranstve. *Vestnik RGRTU*, 39, 55–58. (In Rus)