

Построение моделей движения объектов в задаче преследования. Решение в системе вычислительной математики Mathcad¹

А. А. Дубанов

Бурятский государственный университет
670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

e-mail: alandubanov@mail.ru

Аннотация. В статье изложено описание разработанных моделей поведения объектов в задаче преследования, как и преследующего, так и преследуемого. Целью проведенных исследований является разработка алгоритмов для автономных робототехнических комплексов. В предлагаемых моделях поведения вводятся локальные динамические системы координат, которые формируются направлением движения объектов. В течение определенного промежутка времени объект должен принять решение, в каком направлении он должен двигаться в зависимости от результата анализа координат второго объекта. В силу того, что объект при перемещении в пространстве не может мгновенно производить смену направления движения, в наших задачах «инертность» моделируется при помощи угловой скорости вращения. По предлагаемым моделям поведения объектов в задаче преследования написаны программы в системе компьютерной математики Mathcad, с которыми можно ознакомиться на сайте автора. В результатах работы программ получены анимированные изображения движения объектов, ссылки на которые приводятся в тексте статьи.

Ключевые слова: задача преследования, траектория движения, локальный базис, смена системы координат, модель поведения, динамическая система координат.

1. Введение. Постановка задачи

Рассмотрим задачу преследования на пересеченной местности, когда преследуемый объект («Кролик») и преследующий объект («Лиса») передвигаются в трехмерном пространстве с постоянными по модулю скоростями.

Ранее в работах Айзекса Р., Понтрягина Л. С. рассматривались теоретические аспекты задачи преследования-уклонения (катер-торпеда). В настоящее время с развитием материально-технической базы, ответственной за предоставление ин-

¹ Работа выполнена при поддержке проекта конкурса инновационных грантов Бурятского государственного университета 2019 г. на создание аппаратно-программного комплекса сопровождения.

формации объектам в задаче преследования (лазерные дальномеры, оптиколокационные станции кругового обзора и т. д.), возникает необходимость построения моделей поведения с разработкой оригинальных алгоритмов для каждого типа задач.

В статье [1] рассматривалась модель, когда траектория движения «Кролика» была предопределенной. То есть координаты положения «Кролика» в определенный момент являлись известными. В такой модели предлагалось то, что вектор скорости «Лисы» будет направлен на «Кролика» или на его предполагаемое положение в определенный момент времени.

В данной статье предлагаются иные модели поведения как «Кролика», так и «Лисы». В предлагаемой модели поведения «Кролика» будет производиться анализ пространственного положения «Лисы», ее скорости и в зависимости от этого будет «приниматься» решение «Кроликом» о направлении его движения. Точно такие же рассуждения можно провести и в отношении модели поведения «Лисы».

В своей статье мы опираемся на результаты создателей теории дифференциальных игр Айзека Р. [2], Понтрягина Л. С. [3], Красовского Н. Н. [4] и др. Мы считаем, что теоретические вопросы, изложенные в работах основателей теории, нуждаются в практической реализации. Учитывая прогресс IT-технологий, представляется возможным моделирование процессов преследования, убегания, уклонения и сопровождения в системах компьютерной математики.

Свою работу мы считаем развитием и продолжением работы [5] в плане переноса задачи на пересеченную поверхность, с приданием своей модели «инертности». Развитие идей преследования и уклонения следует из работ [6–8].

Результаты этой статьи могут быть применены разработчиками роботехнических комплексов при реализации некоторых задач преследования.

2. К выбору системы координат объекта преследования «Кролик»

В данной статье основным является то, что выбор «решения» (направление движения), следует после анализа текущего положения в динамической системе координат. В модели поведения «Кролика» предлагается выбрать динамическую локальную систему координат (рис. 1), где:

1. Центр локальной системы координат совпадает с текущими координатами горизонтальной проекции положения кролика (рис. 1):

$$\overrightarrow{Center}_{dynamic}(T) = \begin{bmatrix} X_{rabbit}(T) \\ Y_{rabbit}(T) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

2. Ось абсцисс локальной системы координат совпадает с горизонтальной проекцией скорости «Кролика» на текущий момент времени:

$$\vec{E}_1(T) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d}{dT} X_{\text{rabbit}}(T)\right)^2 + \left(\frac{d}{dT} Y_{\text{rabbit}}(T)\right)^2}} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} X_{\text{rabbit}}(T) \\ \frac{d}{dt} Y_{\text{rabbit}}(T) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\vec{E}_2(T) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d}{dT} X_{\text{rabbit}}(T)\right)^2 + \left(\frac{d}{dT} Y_{\text{rabbit}}(T)\right)^2}} \begin{bmatrix} -\frac{d}{dt} Y_{\text{rabbit}}(T) \\ \frac{d}{dt} X_{\text{rabbit}}(T) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Ось ординат принадлежит горизонтальной плоскости проекций. Локальная система координат является ортогональной, соответственно ось аппликат есть продукт векторного произведения векторов $\vec{E}_1(T)$ и $\vec{E}_2(T)$.

На рис. 2 представлен первый кадр анимированного изображения [9]. В данном видео наглядно представлено, что динамическая система координат привязана к системе «Кролик», т. к. в видео он неподвижен. Программный код, выполненный в системе Mathcad, можно скачать с сайта автора [10] по ссылке «Архив программы «Кролик» и «Лиса» на плоскости. «Кролик» убегает, «Лиса» догоняет».

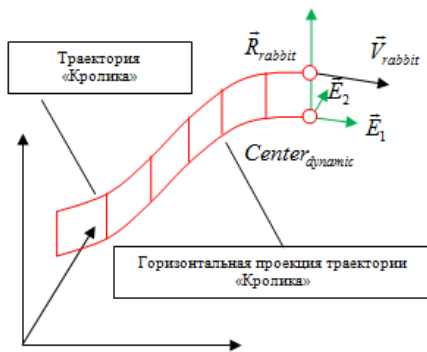


Рисунок 1. Локальная система координат «Кролика»

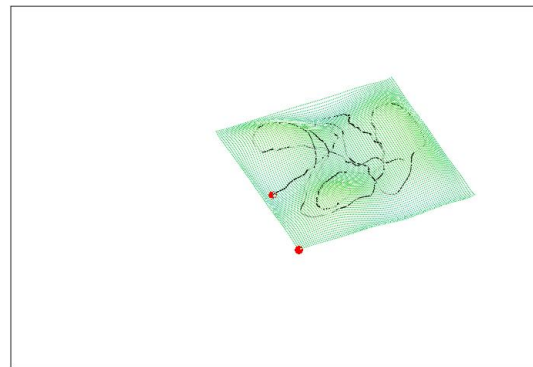


Рисунок 2. Траектории «Кролика», «Лисы» в динамической системе координат (видео)

В рассматриваемой задаче явно выраженных зависимостей $X(T), Y(T)$ не существует. В программе, размещенной на сайте [10], для модели траектории «Кролика» приведены упорядоченные наборы точек: $X_i, Y_i, Z_i = \text{Surface}(X_i, Y_i)$,

$i \in [0...N]$, где $\text{Surface}(X_i, Y_i)$ — функция, описывающая ландшафт местности по точечному базису, после выполнения процедур полиномиальной регрессии и сплайн-интерполяции. Данная процедура подробно описана в комментариях к программному коду на сайте автора [10], а также в статье [1]. Далее для построения функциональной зависимости траектории «Кролика» от времени T введен формальный параметр $t, t_i = i, i \in [0...N]$. Из формулы для сегмента длины дуги $dS^2 = dX_{\text{rabbit}}^2 + dY_{\text{rabbit}}^2 + dZ_{\text{rabbit}}^2$ имеем следующее:

$$\frac{dt}{dS} = \frac{1}{\left(\frac{d}{dt}X_{\text{rabbit}}(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}Y_{\text{rabbit}}(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}Z_{\text{rabbit}}(t)\right)^2}.$$

Встроенный решатель системы Mathcad позволяет решить это дифференциальное уравнение в виде определения зависимости $t(S)$. Учитывая то, что рассматривается случай движения с постоянной по модулю скоростью V_{rabbit} , введем в расчеты реальное время $T, t = t(V_{\text{rabbit}} \cdot T)$. В расчетах понадобятся зависимости $\frac{d}{dt}X_{\text{rabbit}}(t), \frac{d}{dt}Y_{\text{rabbit}}(t), \frac{d}{dt}Z_{\text{rabbit}}(t)$. Построение таких зависимостей указано в комментариях к программному коду на сайте автора [10, 11]. Учитывая все приведенные выше условия, находим производные по времени T координатных функций «Кролика». В результате имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT}X_{\text{rabbit}}(T) &= V_{\text{rabbit}} \frac{\frac{d}{dt}X_{\text{rabbit}}(t)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt}X_{\text{rabbit}}(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}Y_{\text{rabbit}}(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}Z_{\text{rabbit}}(t)\right)^2}}, \\ \frac{d}{dT}Y_{\text{rabbit}}(T) &= V_{\text{rabbit}} \frac{\frac{d}{dt}Y_{\text{rabbit}}(t)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt}X_{\text{rabbit}}(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}Y_{\text{rabbit}}(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}Z_{\text{rabbit}}(t)\right)^2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Полученные формулы (3) подставляем в формулы (2), для определения нового динамического локального базиса $\vec{E}_1(T), \vec{E}_2(T), \vec{E}_3(T)$. Координаты $\vec{Center}_{\text{dynamic}}(T)$ центра локальной системы координат нам также известны. Поэтому, предварительные работы по построению динамической системы координат, можно считать выполненными.

3. Траектория «Лисы» в динамической системе координат «Кролика»

Теперь определим, как будет выглядеть траектория «Лисы» на поверхности, заданной в виде $z = \text{Surface}(x, y)$.

Поверхность, заданная в виде $\vec{R}_{\text{land}}(x, y) = [x, y, \text{Surface}(x, y)]^T$, при переходе в динамическую локальную систему координат $\vec{E}_1(T), \vec{E}_2(T), \vec{E}_3(T)$ с центром в точке $\vec{Center}_{\text{dynamic}}(T)$ $\vec{R}_{\text{rot}}(T) = [X_{\text{rot}}(T), Y_{\text{rot}}(T), Z_{\text{rot}}(T)]^T$ будет выглядеть как на рис. 2. Согласно формулам (3), все точки базиса, по которому была построена базовая поверхность, были построены в базисе $\vec{E}_1(T), \vec{E}_2(T), \vec{E}_3(T)$ с центром в точке $\vec{Center}_{\text{dynamic}}(T)$ (рис. 2). По ссылке [12] можно посмотреть, как исходная поверхность трансформируется по времени. Также обратим внимание на координаты текущего положения «Кролика». Как и предполагалось, абсцисса и ордината равны нулю, изменяется во времени только аппликата. Координаты текущего положения «Кролика» и «Лисы», а также координаты точек траектории «Кролика» рассчитывались аналогично, как и в формуле (3). По ссылке [9] вы можете увидеть картину преследования «Лисой» «Кролика», точки траектории «Кролика», а также точки исходной поверхности. Для дальнейшей работы необходимо будет увидеть картину преследования на плоскости, в горизонтальной проекции. По ссылке [13] представлена картина, как в динамической системе координат, так и в мировой. На рис. 3 и 4 представлены фрагменты первого кадра с видео по ссылке [13]. Мы видим сравнительную картину движения из мировой системы координат и из системы координат «Кролика» на горизонтальной плоскости проекции.

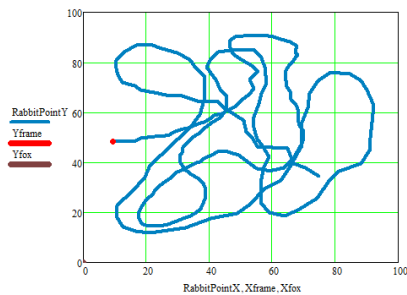


Рисунок 3. Преследование в мировой СК

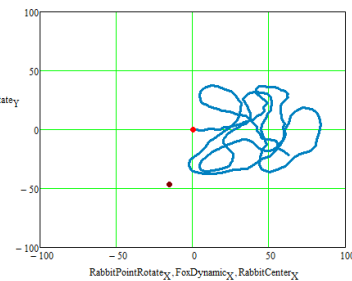


Рисунок 4. Преследование в динамической СК

Анализ (рис. 4) дает нам механизм моделирования поведения «Кролика» и «Лисы». В том плане, что теперь «Кролик» может выбирать, в какую сторону двигаться, вправо или влево. В зависимости от положения «Лисы».

4. Моделирование поведения «Кролика» и «Лисы». Ситуация на плоскости

Необходимо рассмотреть «плоский» случай для наглядности демонстрации подхода к выбору модели движения «Кролика». Пусть «Лиса» преследует «Кролика» на

плоскости. «Кролик» движется по плоскости с постоянной по модулю скоростью V_{rabbit} .

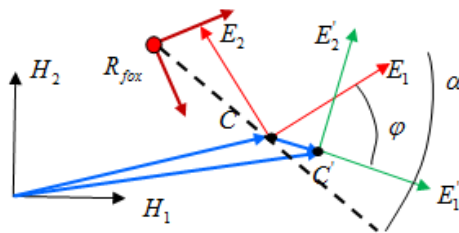


Рисунок 5. Смена СК в следующий момент времени. СК — мировая H_1, H_2

На рис. 5 схематически представлена смена динамической локальной системы координат, связанной с «Кроликом», в моменты времени T и $T + \Delta T$. В момент времени T динамическая система координат задается векторами \vec{E}_1 и \vec{E}_2 , а центр координат задается точкой \vec{C} . В момент времени $T + \Delta T$ система координат «Кролика» переходит в положение \vec{E}'_1, \vec{E}'_2 с центром в точке \vec{C}' . На рис. 5 перейдем в систему координат «Кролика» $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{C}$ (рис. 6). Здесь представлена ситуация в мировой системе координат \vec{H}_1, \vec{H}_2 . Далее следует перейти в систему координат «Кролика» $\vec{E}'_1, \vec{E}'_2, \vec{C}'$ (рис. 6).

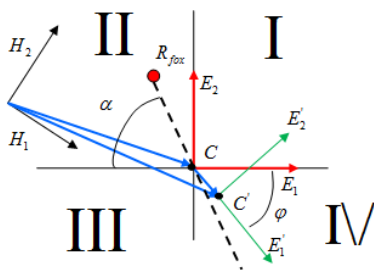


Рисунок 6. Система координат «Кролика»

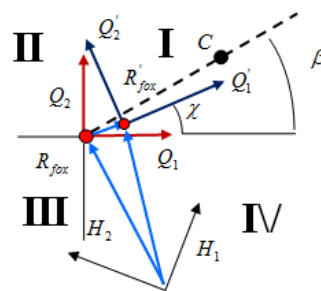


Рисунок 7. Система координат «Лисы»

На рис. 6 предположили, что «Лиса» приближается к «Кролику» из II четверти плоскости. «Кролик» расположен в точке \vec{C} . Здесь время поделено на достаточно малые промежутки ΔT . За это время «Кролик» переходит из положения \vec{C} в положение \vec{C}' : $|\vec{C} - \vec{C}'| = V_{\text{rabbit}} \cdot \Delta T$. Линия, соединяющая точки \vec{R}_{fox} и \vec{C} , составляет с

направлением вектора \vec{E}_1 угол α . Но в рассматриваемой модели «Кролик» не может за промежуток времени ΔT изменить направление движения на угол α . Будем считать, что угол $\alpha > \alpha_0$, где α_0 — некоторое пороговое значение. Если «Кролик» будет иметь угловую скорость вращения ω_{rabbit} , тогда вектор скорости повернется на угол $\varphi = \omega_{\text{rabbit}} \Delta T$. В системе координат $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{C}$ координаты векторов $\vec{E}'_1, \vec{E}'_2, \vec{C}'$ будут выражены следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_1 &= \begin{bmatrix} \cos(\omega_{\text{rabbit}} \cdot \Delta T) \\ -\sin(\omega_{\text{rabbit}} \cdot \Delta T) \end{bmatrix}, \quad \vec{E}'_2 = \begin{bmatrix} \sin(\omega_{\text{rabbit}} \cdot \Delta T) \\ \cos(\omega_{\text{rabbit}} \cdot \Delta T) \end{bmatrix}, \\ \vec{C}' &= V_{\text{rabbit}} \cdot \Delta T \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega_{\text{rabbit}} \cdot \Delta T) \\ -\sin(\omega_{\text{rabbit}} \cdot \Delta T) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

В мировой системе координат \vec{H}_1, \vec{H}_2 вектор \vec{C}' будет выглядеть так:

$$\vec{C}_{\text{new}} = \begin{bmatrix} \vec{C}' \cdot \vec{H}'_1 + x_r \\ \vec{C}' \cdot \vec{H}'_2 + y_r \end{bmatrix},$$

где \vec{H}'_1, \vec{H}'_2 базисные векторы \vec{H}_1, \vec{H}_2 в системе координат $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{C}$, а x_r, y_r — текущие координаты «Кролика». Следует пояснить, что

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{V_{\text{rabbit}}} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}, \quad \vec{E}_2 = \frac{1}{V_{\text{rabbit}}} \begin{bmatrix} -V_y \\ V_x \end{bmatrix}$$

формируются текущим направлением скорости «Кролика». А компоненты векторов \vec{H}'_1, \vec{H}'_2 после вычислений равны:

$$\begin{aligned} \vec{H}'_1 &= \begin{bmatrix} \vec{H}_1 \cdot \vec{E}_1 \\ \vec{H}_1 \cdot \vec{E}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{V_{\text{rabbit}}} \begin{bmatrix} [1 \ 0] \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \\ [1 \ 0] \begin{bmatrix} -V_y \\ V_x \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{V_{\text{rabbit}}} \begin{bmatrix} V_x \\ -V_y \end{bmatrix}, \\ \vec{H}'_2 &= \begin{bmatrix} \vec{H}_2 \cdot \vec{E}_1 \\ \vec{H}_2 \cdot \vec{E}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{V_{\text{rabbit}}} \begin{bmatrix} [0 \ 1] \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \\ [0 \ 1] \begin{bmatrix} -V_y \\ V_x \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{V_{\text{rabbit}}} \begin{bmatrix} V_y \\ V_x \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $\vec{V}_{\text{rabbit}} = [V_x, V_y]^T$.

Более детально этот момент описан на ресурсе [14]. В конечном виде векторы \vec{E}'_1, \vec{E}'_2 и новый центр координат \vec{C}' в мировой системе координат \vec{H}_1, \vec{H}_2 будут выглядеть так:

$$\begin{aligned}
 \vec{C}_{new} &= \begin{bmatrix} \Delta T \cdot [\cos(\omega_{rabbit} \cdot \Delta T) & -\sin(\omega_{rabbit} \cdot \Delta T)] \cdot \begin{bmatrix} V_x \\ -V_y \end{bmatrix} + x_r \\ \Delta T \cdot [\cos(\omega_{rabbit} \cdot \Delta T) & -\sin(\omega_{rabbit} \cdot \Delta T)] \cdot \begin{bmatrix} V_y \\ V_x \end{bmatrix} + y_r \end{bmatrix}, \\
 \vec{E}_{1new} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{V_{rabbit}} \cdot [\cos(\omega_{rabbit} \cdot \Delta T) & -\sin(\omega_{rabbit} \cdot \Delta T)] \cdot \begin{bmatrix} V_x \\ -V_y \end{bmatrix} \\ \frac{1}{V_{rabbit}} \cdot [\cos(\omega_{rabbit} \cdot \Delta T) & -\sin(\omega_{rabbit} \cdot \Delta T)] \cdot \begin{bmatrix} V_y \\ V_x \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \\
 \vec{E}_{2new} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{V_{rabbit}} \cdot [\sin(\omega_{rabbit} \cdot \Delta T) & -\cos(\omega_{rabbit} \cdot \Delta T)] \cdot \begin{bmatrix} V_x \\ -V_y \end{bmatrix} \\ \frac{1}{V_{rabbit}} \cdot [\sin(\omega_{rabbit} \cdot \Delta T) & -\cos(\omega_{rabbit} \cdot \Delta T)] \cdot \begin{bmatrix} V_y \\ V_x \end{bmatrix} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Формулы (5) применимы в том случае, если «Лиса» $\vec{R}_{fox} = [x_{fox}, y_{fox}]^T$ в динамической системе координат $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{C}$ приближается из II четверти (см. рис. 6), при условии $\alpha > \alpha_0$ некоторого порогового значения.

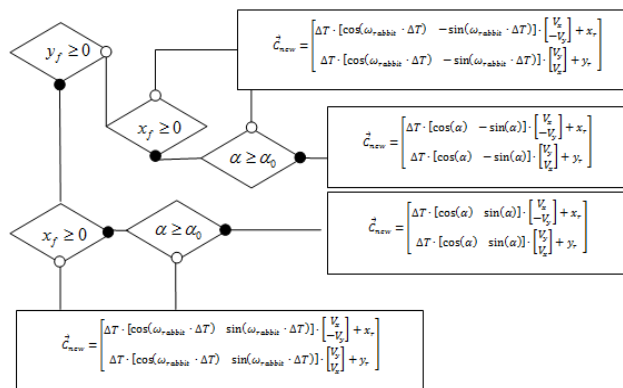


Рисунок 8. Координаты нового центра координат \vec{C}_{new} в мировой системе координат

На рис. 8 представлены возможные значения \vec{C}_{new} в зависимости от того, из какой четверти происходит приближение «Лисы» и от значения угла α .

Аналогичные рассуждения можно провести и в отношении поведения «Лисы». Сформируем систему координат $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{R}_{fox}$ (рис. 7). Как и прежде, векторы базиса «Лисы» формируются ее направлением движения:

$$\vec{Q}_1 = \frac{1}{v_{fox}} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \vec{Q}_2 = \frac{1}{v_{fox}} \cdot \begin{bmatrix} -v_y \\ v_x \end{bmatrix}, \vec{R}_{fox} = \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \end{bmatrix}, \vec{v}_{fox} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}.$$

В случае, представленном на рис. 7, в системе координат $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{R}_{fox}$ «Кролик» находится в I четверти. Линия, соединяющая «Лису» и «Кролика», составляет с вектором \vec{Q}_1 угол β . По истечении промежутка ΔT «Лиса» переместится на расстояние $|\vec{R}_{fox} - \vec{R}'_{fox}| = v_{fox} \cdot \Delta T$. В направлении вектора \vec{Q}'_1

$$\vec{Q}'_1 = \begin{bmatrix} \cos(\omega_{fox} \cdot \Delta T) \\ \sin(\omega_{fox} \cdot \Delta T) \end{bmatrix}, \vec{Q}'_2 = \begin{bmatrix} -\sin(\omega_{fox} \cdot \Delta T) \\ \cos(\omega_{fox} \cdot \Delta T) \end{bmatrix}, \vec{R}'_{fox} = v_{fox} \cdot \Delta T \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega_{fox} \cdot \Delta T) \\ \sin(\omega_{fox} \cdot \Delta T) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Напомним, что формулы (6) выражены в системе координат $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{R}_{fox}$.

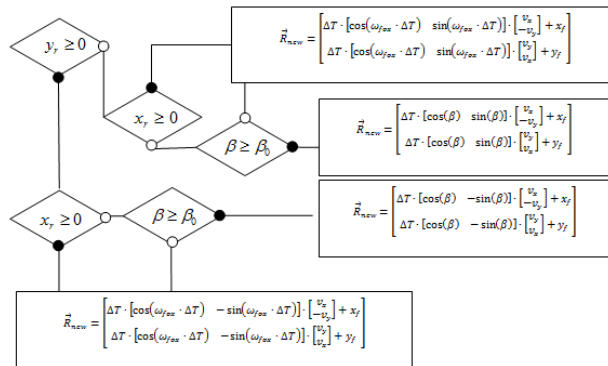


Рисунок 9. Координаты нового положения «Лисы» \vec{R}_{new} в мировой системе координат

Тогда, как и в случае с «Кроликом», мы можем представить (рис. 9) координаты нового положения «Лисы» \vec{R}_{new} в мировой системе координат (β_0 — пороговое значение для угла β , см. рис. 7). На рис. 10 представлены результаты работы программы по алгоритмам, разработка которых показана на рис. 8, 9.

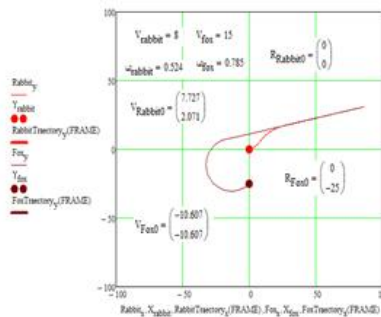


Рисунок 10. Результаты работы программы. Моделирование поведения на плоскости

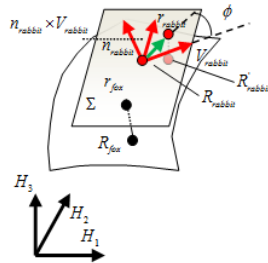


Рисунок 11. Модель движения по поверхности («Кролик»)

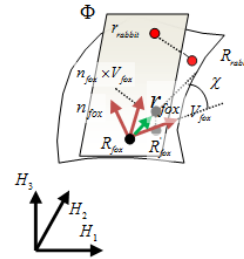


Рисунок 12. Модель движения по поверхности («Лиса»)

Кроме того, мы создали плейлист [15], в котором частично отображена зависимость ситуации преследования от начальных данных, будь то взаимное расположение, углы направления скоростей и их абсолютные величины. На рис. 13 представлен первый кадр одного из видео плейлиста [15], где скорость «Лисы» превышает скорость «Кролика». И угловая скорость «Лисы» больше угловой скорости «Кролика». Отметим, что угловые скорости в предложенной модели величины постоянные.

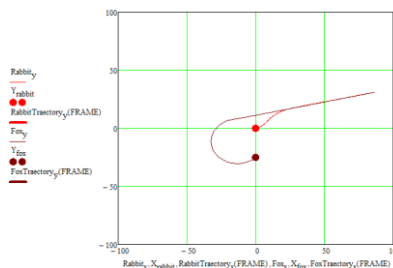


Рисунок 13. Модель движения на плоскости

При такой модели поведения «Кролика» и «Лисы» видим, что со временем это превращается в преследование по прямой линии. Сам программный код можно скачать с сайта автора [13] по ссылке «Архив программы «Кролик» и «Лиса» на плоскости. «Кролик» убегает, «Лиса» догоняет».

5. Модели поведения в задаче преследования на пересеченной поверхности

Мы создали модели поведения «Лисы» и «Кролика» на плоскости. Аналогичные рассуждения можно провести и в трехмерном пространстве, при моделировании задачи преследования на поверхности. Самое простое, что можно сделать, это

спроецировать ход решения задачи на плоскости на поверхность, что и было сделано в следующем видео [16].

На рис. 14 представлен первый кадр из видео [16]. Как видим, здесь была простая проекция траектории, изображенной на рис. 13, на поверхность. Сам программный код с проекцией на горизонтальную плоскость можно скачать с сайта автора [10] по ссылке «Архив программы «Кролик» и «Лиса» на поверхности. Вертикальная проекция с плоскости на поверхность». Но простая проекция с плоскости на поверхность не будет удовлетворять условиям передвижения объектов по поверхности с постоянной скоростью.

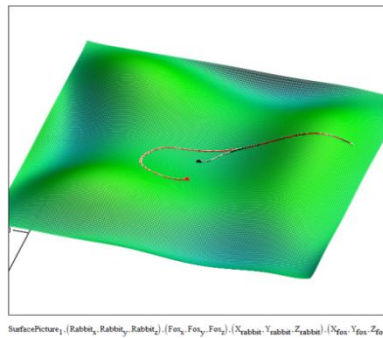


Рисунок 14. Вертикальная проекция задачи преследования

Рассмотрим движение «Кролика» по поверхности. На рис. 11 показана касательная плоскость Σ к точке поверхности, где в определенный момент времени находится «Кролик». В данной точке вводится локальная динамическая система координат:

$$\left[\begin{array}{c} \vec{V}_{\text{rabbit}} \\ \frac{\vec{n}_{\text{rabbit}} \times \vec{V}_{\text{rabbit}}}{|\vec{n}_{\text{rabbit}} \times \vec{V}_{\text{rabbit}}|} \quad \vec{n}_{\text{rabbit}} \end{array} \right],$$

где \vec{V}_{rabbit} — скорость «Кролика», а \vec{n}_{rabbit} — нормаль к плоскости Σ . Как и прежде, «Кролик» будет анализировать положение «Лисы», чтобы сделать следующий шаг. Для этого из точки \vec{R}_{fox} положения «Лисы» строится ортогональная проекция \vec{r}_{fox} на плоскость Σ (см. рис. 11). Относительно точки \vec{r}_{fox} применяется аналогичная логика, что есть в блок-схеме, приведенной на рис. 8. Ортогональная проекция точки положения «Лисы» \vec{r}_{fox} на плоскость Σ рассчитывается следующим образом:

$$\vec{r}_{\text{fox}} = \vec{R}_{\text{fox}} + \frac{(\vec{R}_{\text{rabbit}} - \vec{R}_{\text{fox}}) \cdot \vec{n}_{\text{rabbit}}}{\vec{n}_{\text{rabbit}} \cdot \vec{n}_{\text{rabbit}}} \cdot \vec{n}_{\text{rabbit}}. \quad (7)$$

Для того, чтобы производить анализ компонент вектора «Лисы» (7), проекцию вектора \vec{r}_{fox} необходимо преобразовать в локальную динамическую систему координат «Кролика»:

$$\begin{bmatrix} x_f \\ y_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\vec{r}_{\text{fox}} - \vec{R}_{\text{rabbit}}) \cdot \frac{\vec{V}_{\text{rabbit}}}{|\vec{V}_{\text{rabbit}}|} \\ (\vec{r}_{\text{fox}} - \vec{R}_{\text{rabbit}}) \cdot \frac{\vec{n}_{\text{rabbit}} \times \vec{V}_{\text{rabbit}}}{|\vec{n}_{\text{rabbit}} \times \vec{V}_{\text{rabbit}}|} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

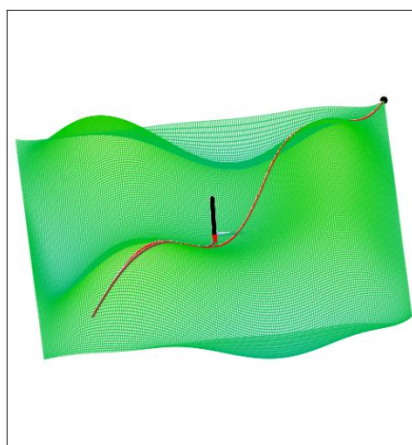
После данного преобразования можем произвести анализ координат $[x_f \ y_f]$ по алгоритму, представленному на рис. 8, для выбора дальнейшего движения «Кролика». Аналогичные рассуждения мы можем произвести в отношении движения «Лисы». Ортогональная проекция точки положения «Кролика» \vec{r}_{rabbit} (9) на плоскость Φ (см. рис. 12) рассчитывается так:

$$\vec{r}_{\text{rabbit}} = \vec{R}_{\text{rabbit}} + \frac{(\vec{R}_{\text{fox}} - \vec{R}_{\text{rabbit}}) \cdot \vec{n}_{\text{fox}}}{\vec{n}_{\text{fox}} \cdot \vec{n}_{\text{fox}}} \cdot \vec{n}_{\text{fox}}. \quad (9)$$

Проекцию положения «Кролика» (9) мы можем преобразовать в систему координат «Лисы» (10):

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\vec{r}_{\text{rabbit}} - \vec{R}_{\text{fox}}) \cdot \frac{\vec{V}_{\text{fox}}}{|\vec{V}_{\text{fox}}|} \\ (\vec{r}_{\text{rabbit}} - \vec{R}_{\text{fox}}) \cdot \frac{\vec{n}_{\text{fox}} \times \vec{V}_{\text{fox}}}{|\vec{n}_{\text{fox}} \times \vec{V}_{\text{fox}}|} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Проанализировать положение «Кролика» и принять соответствующее решение в отношении направления движения «Лиса» можно согласно алгоритму, описанному на рис. 9. На видео [17] можно посмотреть результат работы программы в системе Mathcad, написанной по алгоритму, изложенному в этом параграфе. На рис. 15 представлен первый кадр видео [17].



SurfacePicture₂.NormalPicture₂.SpeedPicture₂.OrdinataPicture₂.(X_{rabbit} , Y_{rabbit} , Z_{rabbit}), (X_{fox} , Y_{fox} , Z_{fox}), (Ff_{fox} , Ff_{osy} , Ff_{osz})

Рисунок 15. Модель движения на поверхности

Преследование по алгоритму данного параграфа также сводится к преследованию по траектории «Кролика», а «Кролик» просто поворачивается спиной к «Лисе». Сам программный код размещен на сайте автора [10] в разделе «Модели поведения в задаче преследования» — «Модели поведения «Кролика» и «Лисы». Его также можно скачать по ссылке «Архив программы Модели поведения «Кролика» и «Лисы» на поверхности».

6. Выводы

В данной статье предлагаются математические модели поведения преследующего объекта («Лисы») и преследуемого («Кролика»). Предложены модели поведения объектов на плоскости и на поверхности. Основой моделей поведения служит ввод динамических систем координат, как для «Лисы», так и для «Кролика». Системы координат формируются векторами скорости движения. Основным моментом является ввод угловой скорости вращения как «инертности» движения. Дальнейшей перспективой развития предложенных моделей нами видится ввод зависимости между угловой скоростью и скоростью движения. Другими словами, чем выше скорость, тем больше инерция. Считаем, что результаты, предложенные в данной статье, могут быть востребованы разработчиками автономных робототехнических комплексов, выполняющими решение задач преследования.

Литература

- [1] Дубанов А. А. Задача преследования. Решение в системе вычислительной математики MathCAD // *Информационные технологии*, 2018. Т. 24. № 4. С. 251–255.
- [2] Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М. : Мир, 1967.
- [3] Понтрягин Л. С. Линейная дифференциальная игра убегания // *Тр. МИАН СССР*. 1971. Т. 112. С. 30–63.
- [4] Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М. : Наука, 1974.
- [5] Бурдаков С. В., Сизов П. А. Алгоритмы управления движением мобильным роботом в задаче преследования // *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление*. 2014. № 6 (210). С. 49–58.
- [6] Желнин Ю. Н. Линеаризованная задача преследования и уклонения на плоскости // *Ученые записки ЦАГИ*. 1977. Т. 8. № 3. С. 88–98.
- [7] Симакова Э. Н. Об одной дифференциальной игре преследования // *Автоматика и телемеханика*. 1967. № 2. С. 5–14.
- [8] Merz A. W. The game of two identical cars // *Journal of optimization and application*. 1972. Vol. 9. No. 5.

- [9] Видео «Смена базиса, преследование» [Электронный ресурс] <https://www.youtube.com/watch?v=L5Z0MCDIEs>
- [10] Дубанов А. А. Раздел «Модель поведения в задаче преследования» [Электронный ресурс] <http://dubanov.exponenta.ru>
- [11] Дубанов А. А. Раздел «Статья «Fox and Rabbit» [Электронный ресурс] <http://dubanov.exponenta.ru>
- [12] Видео «Динамический базис» [Электронный ресурс] <https://youtu.be/KsMZ9Zy8XR8>
- [13] Видео «Смена базиса, преследование, плоскость» [Электронный ресурс] <https://youtu.be/1nNIN-U8WyY>
- [14] Дубанов А. А. http://dubanov.exponenta.ru/russian/book_rus.htm [Электронный ресурс] Раздел «Преобразование базиса»
- [15] Видео, плейлист: «Задача преследования. Модель поведения (адаптивная)» [Электронный ресурс] <https://www.youtube.com/playlist?list=PLfGCUhhiz5wuPh-rKHWYvi-RZf9M215bq>
- [16] Видео «Простая проекция преследования с плоскости на поверхность» <https://youtu.be/BAew7xTw-iU>
- [17] Видео «Модели поведения «Кролика» и «Лисы» на поверхности [Электронный ресурс] <https://www.youtube.com/watch?v=QrKpJoiyB0o>

Автор:

Александр Анатольевич Дубанов — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Геометрия», Институт математики и информатики, Бурятский государственный университет

Building models of the movement of objects in the pursuit problem. Solution in the system of computational mathematics Mathcad

A. A. Dubanov

Buryat State University
24a, st. Smolin, Ulan-Ude, 670000, Russia
e-mail: alandubanov@mail.ru

Abstract. This article provides a description of the developed behavior models of objects in the persecution task, the objects is the pursuer and pursued. The idea of the research is to development an algorithm for autonomous robotic systems. In the proposed behavior models, local dynamic coordinate systems are introduced, which are formed by the direction of movement of objects. For a certain interval of time, the object must decide in which direction it should move depending on the result of the analysis of the coordinates of the second object. Due to the fact that an object cannot move instantly when moving in space, in our problems, "inertia" is modeled using the angular velocity of rotation. According to the proposed models of the behavior of objects in the pursuit problem, programs are written in the computer math system

“MathCAD”, which can be found on the website of the author. The results of the programs obtained animated images of the movement of objects, references to which are given in the text of the article.

Keywords: Pursuit problem, pursued object, pursuing object, speed of movement, speed of rotation, trajectory of movement, local basis, change of the coordinate system, behavior model, dynamic coordinate system, algorithm for constructing the trajectory.

References

- [1] Dubanov A. A. (2018) *Informatsionnyye tekhnologii*, 24:251–255. [In Rus]
- [2] Model' povedeniya v zadache presledovaniya <http://dubanov.exponenta.ru>
- [3] Fox and Rabbit <http://dubanov.exponenta.ru>
- [4] *Preobrazovaniye bazisa* http://dubanov.exponenta.ru/russian/book_rus.htm
- [5] Dinamicheskiy bazis <https://youtu.be/KsMZ9Zy8XR8>
- [6] Smena bazisa, presledovaniye <https://www.youtube.com/watch?v=L5Z0MCDIIEs>
- [7] Smena bazisa, presledovaniye, ploskost' <https://youtu.be/1nNIN-U8WyY>
- [8] Zadacha presledovaniya. Model' povedeniya (adaptivnaya) <https://www.youtube.com/playlist?list=PLfGCUhhiz5wuPh-rKHWYvi-RZf9M215bq>
- [9] Prostaya proyeksitsiya presledovaniya s ploskosti na poverkhnost' <https://youtu.be/BAew7xTw-iU>
- [10] Modeli povedeniya «Krolika» i «Lisy» na poverkhnosti <https://www.youtube.com/watch?v=QrKpJoiyB0o>
- [11] Burdakov S. V., Sizov P. A. (2014) *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti SPbGPU. Informatika. Telekomunikatsii. Upravleniye*, 210:49–58. [In Rus]
- [12] Zhelnin Yu. N. (1977) *Uchenyye zapiski TSAGI*, 8(3):88–97. [In Rus]
- [13] Simakova E. N. (1967) *Avtomatika i telemekhanika*, 2:5–14. [In Rus]
- [14] Merz A. W. (1972) *Journal of optimization and application*. 9(5).
- [15] Ayzeks R. (1967) *Differentsial'nyye igry*. Moscow, Mir. [In Rus]
- [16] Pontryagin L. S. (1971) *Tr. MIAN SSSR*. 112:30–63. [In Rus]
- [17] Krasovskiy N. N., Subbotin A. I. (1974) *Pozitsionnyye differentsial'nyye igry*. Moscow, Nauka. [In Rus]