

## Сравнительный анализ методов интегрирования с плавающим шагом

С. В. Корягин, А. А. Яковлев

Московский технологический университет МИРЭА  
119571, Москва, пр-кт Вернадского, 78

e-mail: dongenealog2003@mail.ru

*Аннотация.* В данной работе проводится анализ точности и сравнение двух популярных парных методов численного интегрирования 4–5 порядка: метод Рунге-Кутты-Фельберга и метод Рунге-Кутты-Дормана-Принса 4–5 порядка с автоматическим изменением шага интегрирования, реализованным в популярной среде для решения задач технических вычислений MATLAB с применением транслятора, автоматически формирующего необходимую статистическую информацию.

*Ключевые слова:* численное интегрирование, метод Рунге-Кутты-Фельберга 4–5 порядка, модификация Дормана-Принса.

### 1. Введение

Актуальность темы обоснована широкой популярностью численного интегрирования, которое используется в случае отсутствия аналитического решения, либо громоздкостью найденного аналитического решения. Помимо того, преимущества численных методов по сравнению с аналитическими заключаются в относительной простоте их реализации в виде алгоритмов и вычислительных программ. У данных методов безусловно есть и недостатки и прежде всего это большие затраты времени вычислений и, в зависимости от параметров задачи и выбранного метода, высокие требования к объему памяти [1].

Проанализировав возможности современных методов численного интегрирования расчета, следует сделать вывод, что интегрирование нежестких систем дифференциальных уравнений, а также систем малой жесткости можно достаточно эффективно проводить явными парными методами с изменяющейся сеткой шага [2]. Проведем сравнительный анализ метода Рунге-Кутты-Фельберга 4–5 порядка, а также метода Рунге-Кутты в модификации Дормана-Принса 4–5 порядка. Оба метода предусматривают автоматическое изменение шага, а также возможность контроля погрешности интегрирования. Для методов 4–5 порядка погрешность метода имеет порядок  $h^6$ . Широкое применение эти методы получили в системах непрерывного моделирования [3–6]. Метод Рунге-Кутты-Фельберга обеспечивает погрешность интегрирования того же порядка, что и методы Рунге-Кутты, но позволяет повысить устойчивость решения.

## 2. Метод Рунге-Кутты-Фельберга 4-5 порядка (РКФ45)

При интегрировании данным методом на каждом шаге рассчитываются 6 промежуточных точек [7]. Реализация метода предполагает построение неравенства для контроля точности вычислений, которое при правильном выборе погрешности не приводит к дополнительным вычислительным затратам. Экономия вычислительных ресурсов обеспечивается тем, что в алгоритме реализована оценка погрешности более точного решения 5-го порядка, позволяющая избежать двойного расчета дифференциальных уравнений. Это обеспечивается вычислением разности двух решений 4-го и 5-го порядка. Найденная оценка может использоваться для корректировки величины шага приращения аргумента.

Для нахождения нового значения неизвестной функции  $y_{n+1}$  последовательно вычисляются величины:

$$k_i = h_n f \left( t_n + \alpha_i h_n, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{i,j} k_j \right), \quad i = \overline{1,6}. \quad (1)$$

Значение пятого порядка точности вычисляется как взвешенная комбинация величин  $k_i$ :

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^6 \gamma_i \cdot k_i, \quad (2)$$

Значения всех коэффициентов даны в табл. 1. Если в формуле (2) коэффициенты  $\gamma_i$  заменить на коэффициенты  $\gamma_i^*$ , то получим решение четвертого порядка. Фактически на практике вычисляют решение пятого порядка и оценку погрешности:

$$\Delta_{n+1} = \sum_{i=1}^6 (\gamma_i^* - \gamma_i) \cdot k_i. \quad (3)$$

При выборе допустимой погрешности метода следует учесть вероятность непредсказуемого возрастания накопленной ошибки. Дело в том, что все вычисления выполняются всегда с фиксированной точностью простых арифметических операций. Точность можно увеличить с помощью специальных способов отображения чисел в памяти компьютера и применением соответствующих алгоритмов арифметических действий. Это приведет к еще большим вычислительным затратам, но главное то, что в современных компьютерах максимальная точность представления чисел и точность выполнения арифметических операций фиксирована. При каждой операции совершается некоторая ошибка, так называемая ошибка округления. При последовательном выполнении операций с плавающей точкой ошибки округления

накапливаются [8]. Следовательно, уменьшение шага интегрирования с целью увеличить точность решения имеет свой предел.

Таблица 1. Значения коэффициентов в формулах (1)–(3)

$\alpha_i$		$\beta_{i,i}$		$\gamma_i$		$\gamma_i^*$	
0						$\frac{16}{135}$	$\frac{25}{216}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					0	0
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$				$\frac{6\ 656}{12\ 825}$	$\frac{1\ 408}{2\ 565}$
$\frac{12}{13}$	$\frac{1\ 932}{2\ 197}$	$-\frac{7\ 200}{2\ 197}$	$\frac{7\ 296}{2\ 197}$			$\frac{28\ 561}{56\ 430}$	$\frac{2\ 197}{4\ 104}$
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3\ 680}{513}$	$-\frac{845}{4\ 104}$		$-\frac{9}{50}$	$-\frac{1}{5}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3\ 544}{2\ 565}$	$\frac{1\ 859}{4\ 104}$	$-\frac{11}{40}$	$\frac{2}{55}$	0

Следующее, на что следует обратить внимание, это максимальная погрешность при использовании метода. Ошибочный выбор погрешности интегрирования может приводить к непомерному увеличению времени вычислений. Следует заметить, что данный алгоритм считается одним из лучших среди методов типа Рунге-Кутты пятого порядка точности.

### 3. Метод Рунге-Кутта, модификация Дормана-Принса 4–5 порядка (РК-ДП45)

Модификация Дормана-Принса 4–5 порядка метода Рунге-Кутта (РК-ДП45) имеет таблицу бутчера со следующими коэффициентами [9] (рис. 1).

Таким образом, при расчете очередного значения решения метод РК-ДП45 опирается на 7 промежуточных точек. В целом метод схож с методом РКФ45. Необходимо отметить, что выбор шага в методе РК-ДП45 в системе MATLAB реализован не тривиально, качество которого для нас представляет интерес.

Проверку расчета методом РКФ45 выполним в одной из систем обыкновенных дифференциальных уравнений из практикума Р.З. Даутова [10]. Рассмотрим полет снаряда, выпущенного с начальной скоростью  $v$  под углом  $\theta$  к горизонту. Будем придерживаться допущения, что земля плоская и вся траектория снаряда лежит в одной плоскости  $xOy$ .

0								
$\frac{1}{5}$	1							
$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$						
$\frac{4}{5}$	$\frac{11}{9}$	$-\frac{14}{3}$	$\frac{40}{9}$					
$\frac{8}{9}$	$\frac{4843}{1458}$	$-\frac{3170}{243}$	$\frac{8056}{729}$	$-\frac{53}{162}$				
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$			
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$		
	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$	⇐ 4-й порядок
	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0	⇐ 5-й порядок

Рисунок 1. Коэффициенты для метода Дормана-Принса

Уравнения движения центра масс снаряда в проекциях на оси координат записываются в виде:

$$\begin{cases} x'' = -\frac{CpSv^2 \cos(\theta)}{2m}; \\ y'' = -\frac{CpSv^2 \sin(\theta)}{2m}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $m$  — масса снаряда;  $v = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$  — скорость движения;  $\theta = \arctg(y'/x')$  — угол между касательной к траектории и осью  $Ox$ ;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $S$  — площадь поперечного сечения снаряда;  $p$  — плотность воздуха;  $C$  — коэффициент лобового сопротивления снаряда.

Сведем приведенную систему уравнений (1) к 4-м уравнениям 1-го порядка:

$$\begin{cases} x' = v \cdot \cos(\theta); \\ y' = v \cdot \sin(\theta); \\ v' = -\frac{CpSv^2}{2m} - g \cdot \sin(\theta); \\ \theta' = -(g \cdot \cos(\theta))/v. \end{cases} \quad (5)$$

Теперь решим данную систему уравнений с помощью методов РК-ДП45 и РКФ45, используя следующие коэффициенты и начальные данные: масса снаряда  $m = 43.51$ ; коэффициент лобового сопротивления  $c = 0.15$ ; плотность воздуха  $p = 1.29$ ; площадь поперечного сечения снаряда  $S = 0.35$ ; ускорение свободного падения:  $g = 9.81$ ;  $x_0 = 0$ ;  $y_0 = 0$ ;  $v_0 = 655$ ;  $\theta_0 = 1.2$ .

Максимально возможная ошибка для метода РКФ45  $E_{max} = 0.001$ , будем использовать переменный шаг. Интервал интегрирования: от 0 до 50. Метод РК-ДП45 возвращает результат, приведенный на рис. 2. Количество успешных шагов: 24. Количество возвратов: 0. Количество расчетов системы: 145. Значения на конце интервала: 1664.9, -945.4, 111.7, -1.5. Время расчета: 0.041 с.

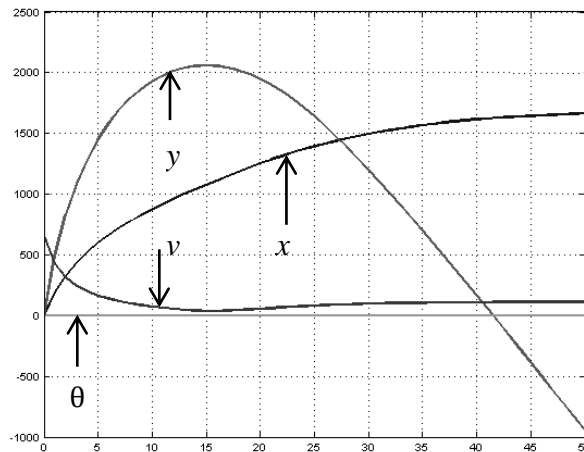


Рисунок 2. Решение задачи определения параметров полета снаряда методом Рунге-Кутты в модификации Дормана-Принса 4-5 порядка

Результаты интегрирования той же системы уравнений, но методом РКФ45 приведены на рис. 3. Количество успешных шагов: 46. Количество возвратов: 4. Количество расчетов системы: 294. Значения на конце интервала: 1664.1, -946, 111.7, -1.5. Время расчета: 0.014 с.

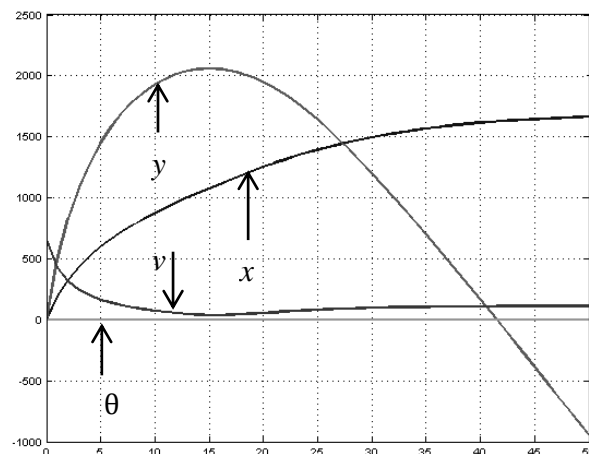


Рисунок 3. Решение задачи определения параметров полета снаряда методом Рунге-Кутта-Фельберга 4-5 порядка

Данный расчет показал, что метод РКФ45 при расчете данной системы дифференциальных уравнений эффективнее метода РК-ДП45 с точки зрения времени расчета. Это наблюдается наряду с тем, что количество расчетов системы дифференциальных уравнений метода РКФ45 существенно больше. Причина может быть в более сложной реализации контроля устойчивости метода РК-ДП45.

Далее протестируем методы интегрирования с точки зрения правильности расчета. За пример возьмем алгебраическое уравнение, имеющее аналитическое решение:

$$y' = \cos(x) \cdot x^2 + \sin(x) \cdot 2x. \quad (6)$$

Решением данного уравнения будет являться уравнение  $y = \sin(x) \cdot x^2$ . Решим данное уравнение численно теми же двумя способами и сравним их результаты с аналитическим решением. Будем использовать следующие исходные данные:  $y_0 = 0$ ;  $x$  от 0 до 50. Шаг интегрирования: 0.1. Максимальная погрешность  $E_{max} = 0.0001$ .

Результат, полученный методом РК-ДП45, приведен на рис. 4. Количество успешных шагов: 28. Количество возвратов: 3. Количество расчетов системы 217. Значения на конце интервала:  $-655.6$ . Время расчета: 0.102 с.

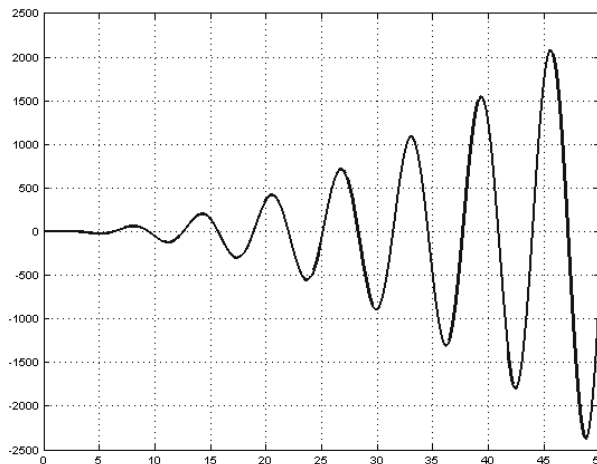


Рисунок 4. Решение уравнения (6) методом Рунге-Кутты модификации Дормана-Принса 4-5 порядка

Метод РКФ45 показал результаты, приведенные на рис. 5. Количество успешных шагов: 164. Количество возвратов: 13. Количество расчетов системы: 1056. Значения на конце интервала:  $-655.9$ . Время расчета: 0.029.

В данном примере время расчета методом РКФ45 также существенно меньше, чем методом РК-ДП45. Но также интересуют точность расчетов. Аналитическое решение со значение аргумента, равного 50, равно  $y = -655.9371$ .

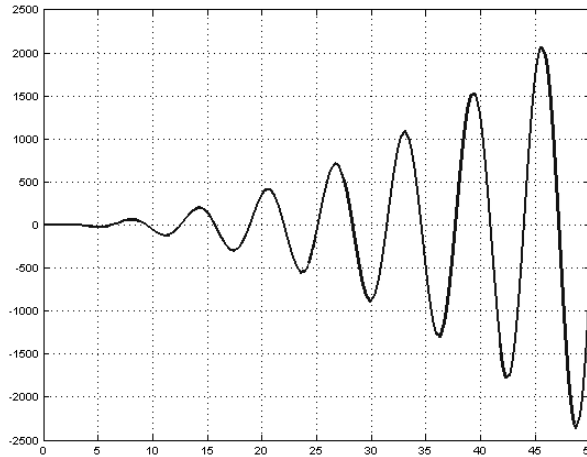


Рисунок 5. Решение уравнения (6) методом Рунге-Кутты Фельберга 4–5 порядка

Таким образом, мы смогли убедиться не только в высокой производительности метода РКФ45, но также в его высокой точности.

Следующим примером продемонстрируем эффективность интегрирования жесткой системы уравнений. Покажем это на примере уравнения осциллятора Ван-Дер-Поля. Уравнение Ван-Дер-Поля имеет следующий вид [11]:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) преобразуется в систему уравнений

$$\begin{cases} x' = y; \\ y' = \mu \cdot (1 - x^2) \cdot y - x. \end{cases} \quad (8)$$

В уравнении (8)  $\mu$  — коэффициент, характеризующий нелинейность и силу затухания колебаний,  $x$  — координата точки, зависящая от времени  $t$ .

Решим систему уравнений (8) с коэффициентом  $\mu = 5$ , интервал интегрирования: от 0 до 30;  $h = 0.0001$ ;  $x_0 = 0.5$ ;  $y_0 = -0.5$ .

Решение данной системы методом РК-ДП45 показано на рис. 6. Статистические показатели этого решения следующие. Количество успешных шагов: 168. Количество возвратов: 32. Количество расчетов системы: 1201. Значения на конце интервала: 1.9, -0.1. Время расчета: 0.77 с.

Для метода РКФ45 будем использовать следующую максимальную ошибку:  $E_{max} = 0.000001$ . Оценим то, что нам покажет метод РКФ45 (рис. 7). Количество успешных шагов: 548. Количество возвратов: 68. Общее количество расчетов системы дифузов: 3690. Значения на конце интервала: 1.9–0.1. Время расчета: 0.127.

Таким образом, система рассчитана с теми же значениями на конце интервала, что в данном случае позволяет говорить о приблизительно такой же точности рас-

чета. В то же время скорость расчет значительно выше, чем у метода РК-ПД45. Разница во времени расчете составляет 0.643 мс.

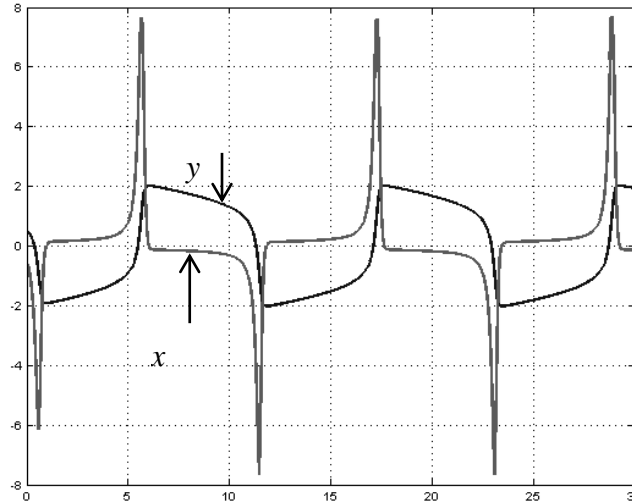


Рисунок 6. Решение системы дифференциальных уравнений Ван-Дер-Поля (8) методом Рунге-Кутты модификации Дормана-Принса 4–5 порядка

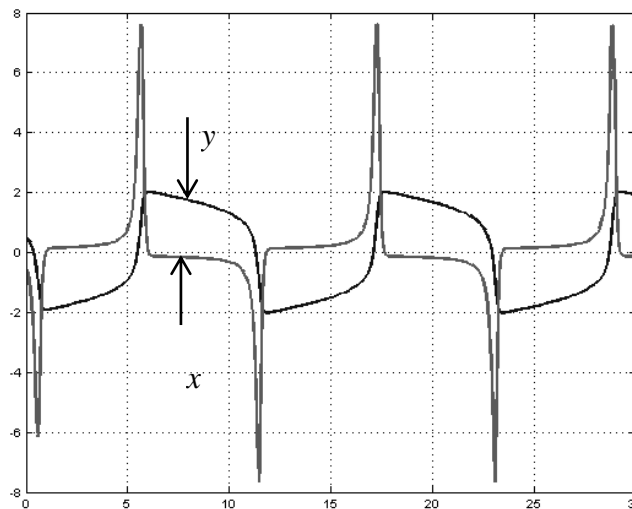


Рисунок 7. Решение системы дифференциальных уравнений Ван-Дер-Поля (8) методом Рунге-Кутта-Фельберга 4–5 порядка

Проведенные исследования позволяют говорить о возможности качественно проводить интегрирование систем дифференциальных уравнений, в том числе с ограниченной жесткостью. Заметим, что в процессе интегрирования активно используется ограничение максимальной ошибки с целью варьирования точно-



сти/времени интегрирования. Данный «рычаг» позволяет нам выбирать наиболее подходящее соотношение данных показателей.

## Литература

- [1] Самарский А. А. Введение в численные методы : учебник. — СПб. : Лань, 2009.
- [2] Гайдышев И. П. Решение научных и инженерных задач средствами Excel, VBA и C/C++. — СПб. : БХВ-Петербург, 2004.
- [3] Корягин С. В. Перекодировщик языков непрерывного моделирования // *Промышленные АСУ и контроллеры*. 2013. № 10. С. 52–56.
- [4] Cellier F. E., Kofman E. Continuous system simulation. — Springer, 2006.
- [5] Birta Louis G., Gilbert A. Modelling and Simulation: Exploring Dynamic System Behaviour. — Ottawa : School of information technology and engineering, 2007.
- [6] Корягин С. В., Яковлев А. А. Проблемно-ориентированный язык системы непрерывного моделирования // *Промышленные АСУ и Контроллеры*. 2014. № 6. С. 36–40.
- [7] Галкин А. В., Дятчина Д. В. Численное решение математических моделей объектов, заданных составными системами дифференциальных уравнений // *Современные проблемы науки и образования*. 2011. № 6. (<http://www.science-education.ru/100-5196>)
- [8] Емельянов Н. В. Практическая небесная механика. Спецкурс ГАИШ МГУ [Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: <http://www.sai.msu.ru/neb/pcm/pcm.htm>, свободный.
- [9] Harder D. W. 4th-order Runge Kutta and the Dormand-Prince Methods. — Ontario : M.Math. LEL Department of Electrical and Computer Engineering University of Waterloo, 2012.
- [10] Даутов Р. З. Практикум по методам решения задачи Коши для систем ОДУ. — Казань : Казанский государственный университет, 2010.
- [11] Эдвардс Ч. Г., Пенни Д. Э. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. — 3-е изд. — М. : Вильямс, 2008.

### **Авторы:**

*Сергей Викторович Корягин* — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры управления и моделирования систем, Московский технологический университет МИРЭА

*Андрей Александрович Яковлев* — аспирант кафедры управления и моделирования систем, Московский технологический университет МИРЭА

## Comparative Analysis of the Integration Methods with a Floating Step

S. V. Koriagin, A. A. Yakovlev

Moscow Technological University MIREA  
78, Prospect Vernadskogo, Moscow, Russia, 119571

e-mail: dongenealog2003@mail.ru

*Abstract.* In this article we will analyze the accuracy and compare two popular pair methods of numerical integration Runge-Kutta-Fehlberg of the 4-5 order and Runge-Kutta Dormand-Prince 4-5 order with automatic change of the integration step, implemented in Matlab, a popular environment for solving problems of technical computing. We will use external compiler, that automatically generates the necessary statistics.

*Key words:* numerical integration, Runge-Kutta-Fehlberg of the 4-5 order method, Dormand-Prince modification.

### Referenses

- [1] Samarskij A. A. (2009) Vvedenie v chislennye metody. Lan'. [In Rus]
- [2] Gajdyshev I. P. (2004) Reshenie nauchnyh i inzhenernyh zadach sredstvami Excel, VBA i C/C++. BHV-Peterburg. [In Rus]
- [3] Koriagin S. V. (2013) *Promyshlennye ASU i kontrollery*, 10:52–56. [In Rus]
- [4] Cellier F. E., Kofman E. (2006) Continuous system simulation. Springer.
- [5] Birta Louis G., Gilbert A. (2007) Modelling and Simulation: Exploring Dynamic System Behaviour. School of information technology and engineering.
- [6] Koriagin S. V., Yakovlev A. A. (2014) *Promyshlennye ASU i Kontrollery*, 6:36–40.
- [7] Galkin A. V., Djatchina D. V. (2011) *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*, 6. (<http://www.science-education.ru/100-5196>)
- [8] Emelyanov N. V. *Prakticheskaja nebesnaja mehanika. Spekurs GAISH MGU* <http://www.sai.msu.ru/neb/pcm/pcm.htm>
- [9] Harder D. W. (2012) 4th-order Runge Kutta and the Dormand-Prince Methods. University of Waterloo.
- [10] Dautov R. Z. (2010) Praktikum po metodam reshenija zadachi koshi dlja sistem ODU. Kazanskij gosudarstvennyj universitet.
- [11] Edwards C. H., Penney D. E. (2008) Elementary Differential Equations: 7th eds. Pearson Education, Inc