

## Статистическая задача об эллипсе и гиперболе, или новогодняя математическая открытка

В. Ф. Очков, А. Г. Елисеев, Ю. С. Федоров

Национальный исследовательский университет «МЭИ»  
111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14

e-mail: [ochkov@twt.mpei.ac.ru](mailto:ochkov@twt.mpei.ac.ru), [YeliseevAG@mpei.ru](mailto:YeliseevAG@mpei.ru), [FedorovYS@mpei.ru](mailto:FedorovYS@mpei.ru)

*Аннотация.* В статье рассмотрена задача определения вероятности получения гиперболы или эллипса, проходящих через пять случайных точек на плоскости. Рассмотрена технология решения математических и прочих задач посредством обращения на специализированные форумы Интернета. Обсуждаются вопросы современных методов преподавания математики в инженерном вузе.

*Ключевые слова:* плоская кривая второго порядка, Mathcad, STEM.

Под Новый год некоторые традиционно ходят в баню<sup>1</sup>. Авторы же имеют другую тоже давнюю, но более интеллектуальную предновогоднюю привычку. Они размещают на сайте пользователей математического пакета Mathcad (<https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/ct-p/PTCMathcad>) поздравительные анимационные открытки с неким математическим смыслом. Вот темы некоторых таких открыток:

- парашютист спускается с неба (решается дифференциальное уравнение) и на определенной высоте раскрывает полотнище с новогодним поздравлением;
- стопоходящая машина (решение систем алгебраических уравнений) выполнена в виде лыжника, бегущего по новогоднему снегу;
- новогодняя елка вырисовывается из колебаний многозвенного маятника (снова решение дифуров...) и т. д.

В конце 2017 г. была опубликована такая новогодняя открытка: в квадрат случайным образом [1] много раз бросаются пять точек, через которые проводится плоская кривая второго порядка. Тот, кто в этой анимации увидит все семь возможных кривых (семь — красивое число!), того ждет в Новом году счастье и удача: см. <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad-Questions/New-2018-Year/m-p/495771>.

Известно, что через пять точек на плоскости можно провести такие кривые второго порядка [2]:

---

<sup>1</sup> См. культовый советский фильм «Ирония судьбы, или с легким паром!».

1. Две ветви гиперболы.
2. Эллипс.
3. Параболу (переходный случай от гиперболы к эллипсу).
4. Окружность (частный случай эллипса).
5. Две пересекающиеся прямые (вырожденные две ветви гиперболы).
6. Две параллельные прямые (еще один случай вырожденности двух ветвей гиперболы).
7. Одну прямую (вырожденная парабола или частный случай случаев 5 и 6).

Но на практике через пять случайно брошенных в квадрат точек можно провести, конечно, только две кривые: гиперболу с двумя ветвями и эллипс — см. рис. 1. Остальные пять кривых авторы на новогодней открытке генерировали вручную, задавая определенные, а не случайные координаты пяти точек.

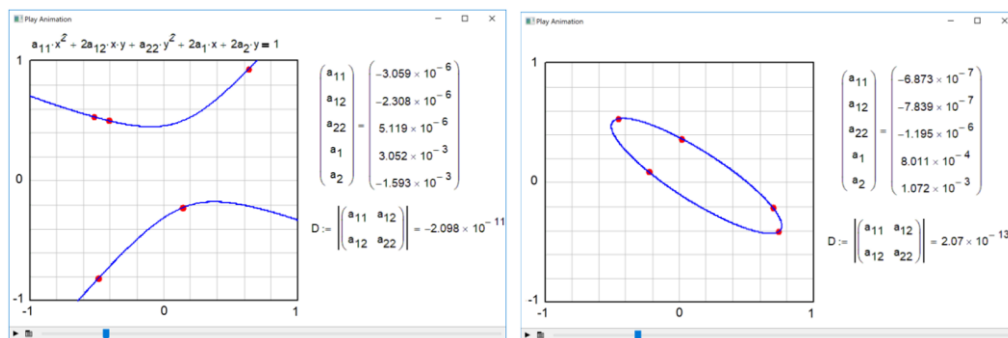


Рисунок 1. Гипербола (справа,  $D < 0$ ) и эллипс (слева,  $D > 0$ ), проходящие через пять случайных точек, брошенных в квадрат

На анимационной открытке (рис. 1) показывались также рассчитанные значения коэффициентов уравнения очередной кривой второго порядка ( $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_1$  и  $a_2$ : см. ее формулу сверху рис. 1), а также значения инварианты  $D$ , по которой детерминировалась кривая:  $D < 0$  — гипербола и  $D > 0$  — эллипс [2].

При  $D = 0$  (и при некоторых других дополнительных условиях) должна получиться парабола — переходный случай от эллипса к гиперболе. Но этот случай, повторяем, имел место только при искусственном, а не случайном задании значений векторов  $X$  и  $Y$ .

Получившим такую новогоднюю открытку дополнительно (для «полного счастья» в наступающем году) предлагалось подсчитать, сколько раз они видели гиперболу, а сколько раз эллипс.

Оказалось, что эллипс появлялся примерно в 28% случаев, а гипербола в остальных 72%. Это было подсчитано, конечно, не через просмотр кадров анимации, а через статистический компьютерный эксперимент — см. на рис. 2 соответствующую Mathcad-программу [3].

```
(H E P) := for i ∈ 1.. 1000000
  X ← runif(5, -1, 1)
  Y ← runif(5, -1, 1)
  (a11 a12 a22 a1 a2) ← Isolve
  ⎡ (X1)² 2·X1·Y1 (Y1)² 2·X1 2·Y1 ⎤
  ⎡ (X2)² 2·X2·Y2 (Y2)² 2·X2 2·Y2 ⎤
  ⎡ (X3)² 2·X3·Y3 (Y3)² 2·X3 2·Y3 ⎤
  ⎡ (X4)² 2·X4·Y4 (Y4)² 2·X4 2·Y4 ⎤
  ⎡ (X5)² 2·X5·Y5 (Y5)² 2·X5 2·Y5 ⎤
  ⎡ 1 ⎤
  ⎡ 1 ⎤
  ⎡ 1 ⎤
  ⎡ 1 ⎤
  D ← ⎡ a11 a12 ⎤
      ⎡ a12 a22 ⎤
  if (D < 0, H ← H + 1, if (D > 0, E ← E + 1, P ← P + 1))
(H E P)
H = 719484 E = 280516 P = 0 H + E + P = 1000000 E/H = 0.389885
```

Рисунок 2. Подсчет гипербол и эллипсов, получающихся в квадратной области с пятью случайными точками

На рис. 2 показана Mathcad-программа подсчета количества выпавших гипербол (переменная H) и эллипсов (E) при бросании десять миллионов раз пяти случайных точек в квадрат размером 2 на 2 (см. рис. 1). Заодно (на всякий случай!) подсчитывалось количество выпавших парабол (P). Но они, как и ожидалось, не выпадали.

В Mathcad-документе на рис. 2 достаточно пояснить суть следующих операторов и функций.

1. Оператор **for** формирует цикл с параметром *i* бросания точек в квадрат; переменные с именами H, E и P обнуляются автоматически.

2. Функция **runif** возвращает вектор с пятью элементами (первый аргумент этой функции), хранящими числа со случайным распределением на интервале от -1 до 1 (второй и третий аргументы функции runif).

3. Функция **Isolve** возвращает решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), матрица коэффициентов при неизвестных которой — это первый аргумент функции **Isolve**, а вектор свободных членов (единичный вектор) — второй аргумент. Решения СЛАУ — это вектор коэффициентов искомого уравнения второго порядка:  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_1$  и  $a_2$ .

4. По первым трем коэффициентам уравнения кривой второго порядка ( $a_{11}$ ,  $a_{12}$  и  $a_{22}$ ) высчитывался инвариант  $D$ , знак которого определял, что мы получили — эллипс, гиперболу или параболу.

5. Функция **if** ведет подсчет выпавших гипербол, эллипсов и парабол.

В конце рис. 2 показано, что при миллионе бросаний пяти точек в квадрат гиперболы (H) выпала 719 484 раз, эллипс (E) 280 516 раз, а парабола (P), как и ожидалось, ни разу.

Люди, получив обычную поздравительную открытку, как правило, читают сообщение в ней, переворачивают ее, любуются картинкой и... убирают открытку в альбом, ящик стола или в... мусорную корзину. Публикация же на форуме пользователей Mathcad новогодней открытки с гиперболами и эллипсами имело другие последствия:

1. Было высказано предположение, что открыта некая новая математическая константа 0.28... Ей даже то ли в шутку, то ли всерьез дали имя: V Points constant. V Points — это пять точек на «римском и английском». Но V. Points — это и обычный неправильный компьютерный перевод на английский язык имени одного из авторов данной статьи — В. Очков.

2. Был найден способ аналитического, а не статистического (монте-карловского) подсчета данной константы. Несложно доказать, что эта константа равна  $\pi/12 / (0.262\dots)$ : отношение объема прямого кругового конуса с радиусом основания  $r$  и высотой  $r$ , к объему прямоугольного параллелепипеда высотой  $r$  и квадратом в основании со стороной  $2r$ , в который этот конус вписан (рис. 3).

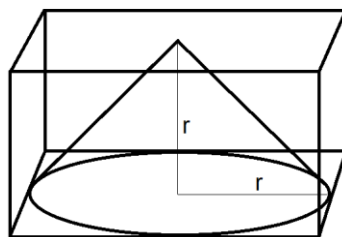


Рисунок 3. Конус, вписанный в параллелепипед

Обсуждение и проверка этого доказательства были вынесены на сайт <https://dxdy.ru/topic129587.html>. Было показано, что оно относится к решению несколько иной задачи — не определение вероятности получения эллипса, проходящего через 5 точек в квадрате, а вероятности получения эллипса по квадратичному уравнению при разных значениях двух коэффициентов этого уравнения. Этим можно объяснить отличия в числах 0.262 и 0.282 — см. выше. Решение

$\pi/12 / (0.262\dots)$  предполагает, что коэффициенты квадратичной формы распределены равномерно. С другой стороны, если равномерно распределены координаты точек, через которые проходит кривая 2-го порядка, то коэффициенты квадратичной формы, задающие эту кривую, будут иметь более сложное распределение. Например, если величина  $f$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[0, 1]$ , то величина  $f^2$  будет с вероятностью 0.5 попадать в отрезок  $[0, 0.25]$  и с вероятностью 0.5 в отрезок  $[0.25, 1]$ , т. е. иметь уже неравномерное распределение. Кстати, если пять точек бросать не в квадрат, а в круг с единичным радиусом, то число 0.282 увеличится до 0.298.

3. Посетитель форума Mathcad Франк Парсель (Frank Purcell — Чикаго, США) высказал предположение, что эту константу можно определить (оценить) другим путем — решением задачи о четырех точках (IV points problem<sup>2</sup>), через которые проводятся две пересекающиеся параболы, которые разбивают квадратную область на некие зоны. См. <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad-Questions/Firecrackers-2018-or-5-th-order-curve-and-20-points/m-p/496511> и <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Hyperbola-and-Ellipse-new-math-constant/td-p/495992>. Пятая случайная точка может попадать в одну из этих зон, которые определяют, что будет построено через эти пять точек — гипербола или парабола. Подсчет суммы площадей этих зон и даст нашу константу. Задача о четырех точках описана на сайте <http://mathworld.wolfram.com> (см. E. Weisstein's article on Sylvester's Four-Point Problem).

4. На форуме пользователей Mathcad началась некая гонка — кто бросит больше точек в квадрат и кто сумеет провести через них кривую все более и более высокого порядка. Форумчане стали бросать в квадрат 9 точек (кривая третьего порядка — кубика), 14 точек (4-й порядок) и так далее до кривой... 50-го порядка (Werner Exinger) — см. на рис. 4 некоторые такие кривые.

Но главный вывод, который был сделан из просмотра описываемой новогодней открытки, был такой.

Человек, столкнувшийся с новой математической или инженерной задачей, начинает искать средства ее решения. Сейчас к этой работе все чаще и чаще привлекается компьютер. Для компьютера ищутся нужные математические программы, а также встроенные или внешние процедуры и функции. Но можно поступить иначе — разместить задачу на специализированном форуме Интернета и не только решить ее, но и услышать разные толкования людей этой задачи и ее решения [4].

---

<sup>2</sup> На плоскость случайным образом бросаются четыре точки и определяется, формируют ли они выпуклый четырехугольник или одна из точек находится внутри треугольника, образуемого тремя другими точками.

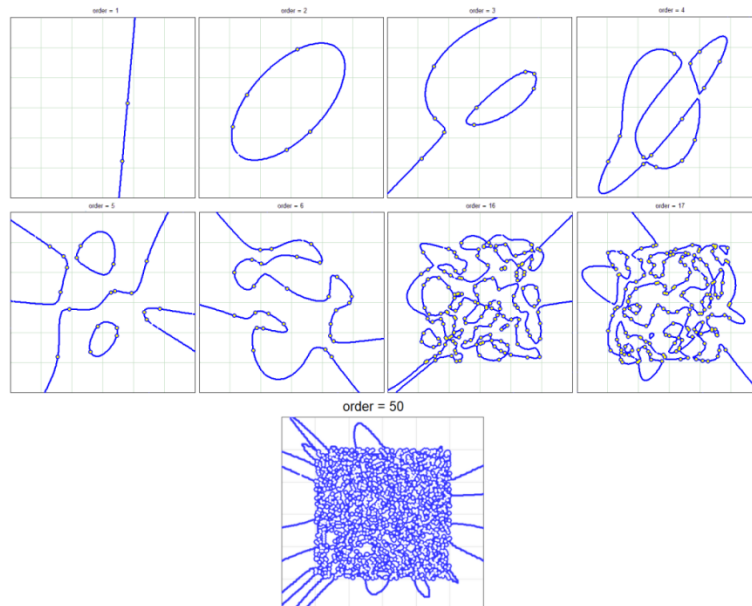


Рисунок 4. Кривые разного порядка, проходящие через разное число точек, брошенных в квадрат

**Вывод.** Сделана попытка расчета новой математической константы, связанной с гиперболой и эллипсом. Предлагаем читателям доказать или опровергнуть существование данной константы, а также попытаться доказать наличие VI points, VII points, VIII points, IX points etc констант.

Но главный вывод в том, что задача, описанная статье, — это интересная тема для учебного занятия на стыке математики и информатики. Она охватывает линейную алгебру, программирование, статистику, теорию вероятности, анимацию... Она лежит в русле современных образовательных технологий преподавания математики в инженерных вузах, подразумевающих широкое использование численных методов и реализации их в средах компьютерных математических программ с опорой на специализированные форумы Интернета (STEM — Science, Technology, Engineering and Mathematic).

## Литература

- [1] *Ермаков С. М.* Метод Монте-Карло в вычислительной математике. Вводный курс. — М. : БИНОМ, 2011.
- [2] *Савелов А. А.* Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство). — М. : Физматлит, 1960.
- [3] *Очков В. Ф., Богомолова Е. П., Иванов Д. А.* Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет : учеб. пособие. — 2-е изд., испр. и доп. — СПб. : Лань, 2018.

- [4] Очков В. Ф., Герк С. Активность на форумах — важная часть учебы и последующей инженерной деятельности студента // *Открытое образование*. 2014. № 5. С. 93–101.

**Авторы:**

Валерий Федорович Очков — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры теоретических основ теплотехники, Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Александр Георгиевич Елисеев — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Юрий Сергеевич Федоров — доцент, доцент кафедры высшей математики, Национальный исследовательский университет «МЭИ»

---

## Statistical Problem of Ellipse and Hyperbola or Christmas Math Postcard

V. F. Ochkov, A. G. Eliseev, Yu. S. Fyodorov  
National Research University Moscow "Power Engineering Institute"  
Krasnokazarmennaya st., 14, Moscow, Russia 111250  
e-mail: ochkov@twt.mpei.ac.ru, YeliseevAG@mpei.ru, FedorovYS@mpei.ru

*Abstract.* The article considers the problem of determining the probability of obtaining a hyperbola or ellipse passing through five random points on a plane. The technology of solving mathematical and other problems is considered by contacting specialized Internet forums. Discusses issues of modern methods of teaching mathematics in an engineering university.

*Keywords:* second order flat curve, Mathcad, pseudo-random number, STEM.

## References

- [1] Yermakov S. M. (2011) *Metod Monte-Karlo v vychislitel'noy matematike. Vvodnyy kurs*. Moscow, BINOM. [In Rus]
- [2] Savelov A. A. (1960) *Ploskiye krivyye. Sistematika, svoystva, primeneniya (spravochnoye rukovodstvo)*. Moscow, Fizmatlit. [In Rus]
- [3] Ochkov V. F., Bogomolova Ye. P., Ivanov D. A. (2018) *Fiziko-matematicheskiye etyudy s Mathcad i Internet: Uchebnoye posobiye*. Saint-Petersburg, Lan'. [In Rus]
- [4] Ochkov V. F., Gerk S. (2014) *Otkrytoye obrazovaniye*, 5:93–101 [In Rus]