

К вопросу о поиске последовательностей де Брейна

А. А. Цацин, Г. А. Мурашов

АО Московский научно-производственный комплекс «Авионика» имени О. В. Успенского
127055, Москва, ул. Образцова, 7

e-mail: sand_e@mail.ru, wild-mga@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматриваются основные положения метода поиска полной совокупности бинарных последовательностей де Брейна при заданной разрядности цифровой шкалы датчика положения.

Ключевые слова: цифровой датчик положения, бинарная последовательность де Брейна, циклический ориентированный граф, гамильтонов цикл, ациклическое ориентированное дерево.

1. Введение

В последние годы возросло внимание к последовательностям де Брейна как к основе шкалы для цифровых датчиков углового и линейного положения [1–4]. Предварительные исследования показали, что последовательности де Брейна одинаковой длины имеют различные свойства. Эти свойства необходимо учитывать при обосновании выбора шкалы цифровых датчиков положения. Существующие методы поиска бинарных последовательностей де Брейна, как правило, опираются на свойства примитивных полиномов [5–11]. Основная задача этих методов заключается в быстром получении последовательности большой длины. При этом задача поиска собственно примитивных полиномов является самостоятельной, а применение этих методов требует дополнительно специального программно-аппаратного обеспечения в виде линейных или нелинейных сдвиговых регистров для получения последовательностей де Брейна. Более универсальным являются методы представленные в [12].

В области цифровых датчиков не стоит задача генерация последовательностей больших длин, а требуется получение всего семейства последовательностей относительно небольшой длины. Методы подобные предложенным в [13, 14], не решают данной задачи, они позволяют получить частные решения, а не всю совокупность последовательностей заданной длины.

В данной статье рассматриваются основные положения относительно простого метода «ациклического ориентированного дерева» для поиска всей совокупности бинарных последовательностей де Брейна при заданной разрядности цифровой шкалы датчика.

Метод базируется на исследовании циклических ориентированных графов де Брейна G_D , а точнее на поиске гамильтоновых циклов обхода этих графов. Предлагаемый метод не является рекуррентным, а относится к переборным методам.

2. Описание метода

Как известно, последовательности де Брейна можно определять путем поиска эйлеровых циклов в соответствующих графах, однако, поиск гамильтоновых циклов подкупает простотой формирования исходной информации для исследования.

На первом этапе рассмотрим формализованный способ формирования матрицы смежности для построения ориентированного графа G_D на примере бинарной шкалы разрядностью $n_p = 3$.

Длина искомой последовательности N , соответствующая количеству вершин графа G_D , определяется выражением

$$N = 2^{n_p} = 2^3 = 8. \quad (1)$$

На основании (1) сформируем исходную таблицу A_{10} кодов вершин графа G_D в десятичной системе и таблицу A_2 в двоичной системе счисления (рис. 1). Из таблицы A_2 для каждой вершины выделим суффиксы длиной $n_{sf} = n_p - 1$ и поместим их в таблицы смежных вершин B_2 и C_2 .

По условию графа де Брейна в двоичной системе счисления коды смежных вершин должны начинаться с суффикса двоичного кода исходной вершины и заканчиваться либо «0», либо «1», т. е. можем получить таблицы кодов смежных вершин B_2 (коды вершин оканчиваются «0») и C_2 (коды вершин оканчиваются «1»).

В основе метода лежит поисковая процедура, работающая с десятичными кодами вершин, а не с двоичными. Поэтому необходимо двоичные коды смежных вершин перевести в десятичные (таблицы B_{10} и C_{10}).

Таким образом, имеем таблицу A_{10} десятичных кодов исходных вершин графа G_D и таблицы десятичных кодов смежных вершин B_{10} и C_{10} (рис. 1). На основании данных таблиц A_{10} , B_{10} и C_{10} формируем матрицу смежности графа де Брейна в десятичных кодах (рис. 2).

На основании матрицы смежности строим ориентированный граф де Брейна для случая $n_p = 3$ (рис. 3).

Необходимо заметить, что при поиске семейства последовательностей необходимо отбросить «петли» «0–0» и «7–7», т. к. они противоречат условию гамильтонова цикла. Поэтому и в матрице смежности графа соответствующие ребра фактически обнуляются.

A_{10}	A_2
0	<u>000</u>
1	<u>001</u>
2	<u>010</u>
3	<u>011</u>
4	<u>100</u>
5	<u>101</u>
6	<u>110</u>
7	<u>111</u>

B_2		B_{10}
<u>00</u>	0	0
<u>01</u>	0	2
<u>10</u>	0	4
<u>11</u>	0	6
<u>00</u>	0	0
<u>01</u>	0	2
<u>10</u>	0	4
<u>11</u>	0	6

C_2		C_{10}
<u>00</u>	1	1
<u>01</u>	1	3
<u>10</u>	1	5
<u>11</u>	1	7
<u>00</u>	1	1
<u>01</u>	1	3
<u>10</u>	1	5
<u>11</u>	1	7

a
б
в

Рисунок 1. Таблицы кодов: а) — исходных вершин, б) и в) — смежных вершин

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1						
1			1	1				
2					1	1		
3							1	1
4	1	1						
5			1	1				
6					1	1		
7							1	0

Рисунок 2. Матрица смежности графа де Брейна при $n_p = 3$

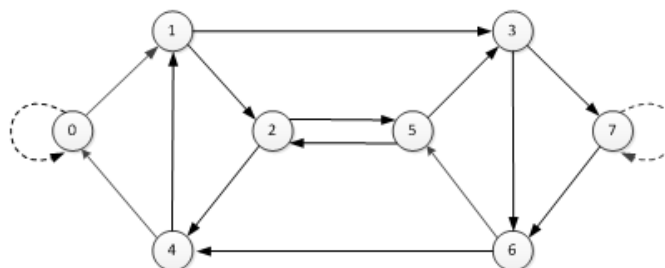


Рисунок 3. Граф де Брейна при $n_p = 3$

Сущность предлагаемого метода поиска семейства последовательностей де Брейна при заданной разрядности заключается в анализе ветвей ациклического ориентированного дерева, полученного путем преобразования исходного ориенти-

рованного циклического графа. При этом метод работает с десятичными кодами вершин графа.

В качестве корня ациклического ориентированного дерева целесообразно выбирать вершину с нулевым номером.

Введем систему координат для данного дерева: ось абсцисс — номер ветви (i) и ось ординат — номер уровня дерева (j). Количество уровней в дереве N всегда конечно и определяется выражением (1). Для удобства анализа введем обратную нумерацию уровней, т. е. $j = \overline{0, N-1}$ начиная с нулевой вершины. Максимальная ширина ориентированного дерева N_m по координате i (максимальное количество ветвей) при $j = N-1$ равна

$$N_m = 2^{N-2} = 2^6 = 64. \quad (2)$$

Из рисунка видно, что при таком подходе в полученном дереве по значению уровня (j) можно выделить две области:

- «основание дерева» — при

$$0 \leq j \leq n_p; \quad (3)$$

- «крона дерева» — при

$$n_p < j \leq N. \quad (4)$$

Характерной чертой «основания дерева» является, то, что в данной области ориентированного дерева находятся все исходные вершины из таблицы \mathbf{A}_{10} (см. рис. 1), причем все вершины присутствуют только один раз. В «кроне дерева» наблюдаются повторы в зависимости от номера ветви (i).

Особенность предлагаемого метода поиска гамильтоновых циклов в ациклическом ориентированном дереве заключается в возможности вычисления десятичного кода (!) номера $a(i, j)$ любой вершины в любой ветви дерева на любом уровне, т. е. в зависимости от координат (i, j).

Так в области «основания дерева» для любой i -ой ветви номер вершины определяется выражением

$$a(i, j) = i \setminus \left(\frac{N_m}{2^{j-1}} \right) + 2^{j-1}, i = \overline{0, N_m(i)-1}, 1 < j < n_p, \quad (5)$$

где «\» — оператор деления без остатка.

Отметим, что на уровнях $j=0$ и $j=1$ расположены вершины с кодами соответственно 0 и 1. Данные вершины присутствуют во всех ветвях и нет необходимости их определять.

В области «кроны дерева» для любой i -ой ветви номер вершины определяется выражением

значений координаты k обратимся к рис. 4. Из рисунка видно, что последний уровень «кроны дерева» ($j = N - 1$) представляет собой совокупность из последовательных наборов размерностью N всех исходных вершин таблицы A_{10} . Учитывая, что максимальная ширина ориентированного дерева равна N_m , можно утверждать, что искомые пути встречаются только K раз

$$K = N_m / N, \quad (7)$$

Поскольку основные выражения (5) и (6) для вычисления кодов вершин определены относительно координаты i , то введем соотношение между координатами k и i

$$i = \frac{N}{2} \cdot (2 \cdot k + 1), k = \overline{0, K-1}. \quad (8)$$

В рассматриваемом случае, учитывая выражения (1) и (2), из формулы (7) получаем, что количество вариантов снижается в 8 раз (с 64 до 8). Что значительно сокращает время поисковой процедуры.

Таким образом, применяя поисковый алгоритм, основанный на предложенных соотношениях (1)–(8), и выполняя динамическую проверку на повтор прохождения вершин текущего пути, формируем искомую совокупность гамильтоновых циклов графа де Брейна заданной разрядности.

Для графа де Брейна разрядностью $n_p = 3$ применение предлагаемого метода позволило определить 2 (два) гамильтоновых цикла (табл. 1) и соответствующие циклические последовательности де Брейна (табл. 2).

Таблица 1. Гамильтоновы циклы графа де Брейна при $n_p = 3$

№ пп	k	i	Вершины гамильтоновых циклов							
			0	1	2	5	3	7	6	4
1	3	28	0	1	2	5	3	7	6	4
2	6	52	0	1	3	7	6	5	2	4

Таблица 2. Последовательности де Брейна при $n_p = 3$

№ пп	Бинарные последовательности							
	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
2	0	0	0	1	1	1	0	1

3. Результаты применения метода

В качестве основных результатов применения метода «ациклического ориентированного дерева» приводим семейство гамильтоновых циклов графа де Брейна при $n_p = 4$ без петель «0–0» и «15–15» (рис. 6). В табл. 3 приведены гамильтоновы циклы, а в табл. 4 соответствующие циклические последовательности де Брейна.

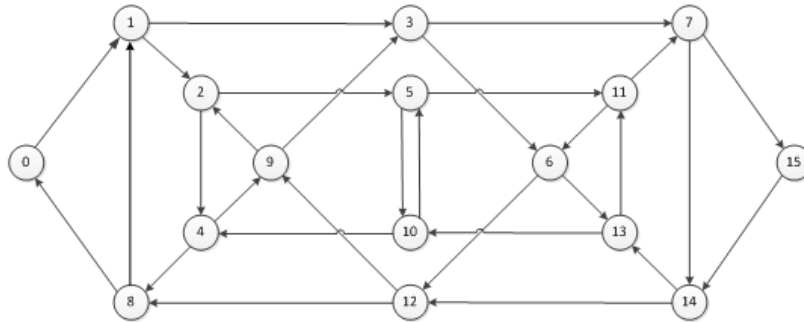


Рисунок 6. Граф де Брейна при $n_p = 4$

Более серьезным результатом применения рассматриваемого метода является получение всего семейства циклических последовательностей де Брейна при разрядности $n_p = 5$. На рис. 7 представлен исходный граф G_D без петель «0–0» и «31–31».

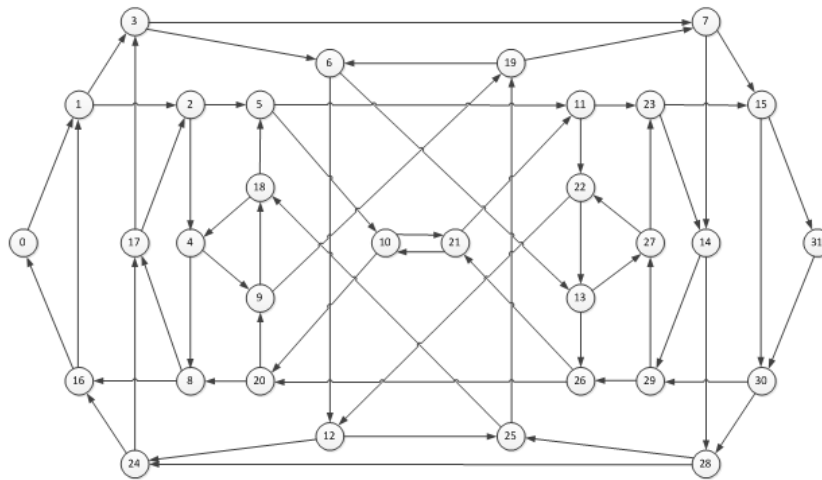


Рисунок 7. Граф де Брейна при $n_p = 5$

При применении алгоритма на основе данного метода получено 2048 (две тысячи сорок восемь) гамильтоновых цикла. В табл. 5 приведен фрагмент найденного семейства гамильтоновых циклов, а в табл. 6 приведены соответствующие циклические последовательности де Брейна при разрядности $n_p = 5$.

Таблица 3. Гамильтоновы циклы графа де Брейна при $n_p = 4$

№ nn	k	i	Вершины гамильтоновых циклов															
			0	1	2	4	9	3	6	13	10	5	11	7	15	14	12	8
1	215	3448	0	1	2	4	9	3	6	13	10	5	11	7	15	14	12	8
2	245	3928	0	1	2	4	9	3	7	15	14	13	10	5	11	6	12	8
3	311	4984	0	1	2	5	10	4	9	3	6	13	11	7	15	14	12	8
4	317	5080	0	1	2	5	10	4	9	3	7	15	14	13	11	6	12	8
5	414	6632	0	1	2	5	11	6	12	9	3	7	15	14	13	10	4	8
6	423	6776	0	1	2	5	11	6	13	10	4	9	3	7	15	14	12	8
7	486	7784	0	1	2	5	11	7	15	14	12	9	3	6	13	10	4	8
8	489	7832	0	1	2	5	11	7	15	14	13	10	4	9	3	6	12	8
9	606	9704	0	1	3	6	12	9	2	5	11	7	15	14	13	10	4	8
10	663	10616	0	1	3	6	13	10	4	9	2	5	11	7	15	14	12	8
11	700	11208	0	1	3	6	13	10	5	11	7	15	14	12	9	2	4	8
12	754	12072	0	1	3	6	13	11	7	15	14	12	9	2	5	10	4	8
13	918	14696	0	1	3	7	15	14	12	9	2	5	11	6	13	10	4	8
14	933	14936	0	1	3	7	15	14	13	10	4	9	2	5	11	6	12	8
15	940	15048	0	1	3	7	15	14	13	10	5	11	6	12	9	2	4	8
16	946	15144	0	1	3	7	15	14	13	11	6	12	9	2	5	10	4	8

Таблица 4. Последовательности де Брейна при $n_p = 4$

№ nn	Бинарные последовательности																
	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
3	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
4	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
5	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
6	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
7	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
8	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
9	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
10	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
11	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
12	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1
13	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
14	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
15	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1
16	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1

Таблица 5. Гамильтоновы циклы графа де Брейна при $n_p = 5$

№ nn	k	i	Вершины гамильтоновых циклов																																
			0	1	2	4	8	17	3	6	12	25	18	5	10	20	9	19	7	14	29	26	21	11	22	13	27	23	15	31	30	28	24	16	
1	3317103	106147912	0	1	2	4	8	17	3	6	12	25	18	5	10	20	9	19	7	14	29	26	21	11	22	13	27	23	15	31	30	28	24	16	
2	3317167	106149360	0	1	2	4	8	17	3	6	12	25	18	5	10	20	9	19	7	14	29	27	22	13	26	21	11	23	15	31	30	28	24	16	
3	3317595	106163056	0	1	2	4	8	17	3	6	12	25	18	5	10	20	9	19	7	15	31	30	29	26	21	11	22	13	27	23	14	28	24	16	
4	3317611	106163568	0	1	2	4	8	17	3	6	12	25	18	5	10	20	9	19	7	15	31	30	29	27	22	13	26	21	11	23	14	28	24	16	
5	3323119	106339824	0	1	2	4	8	17	3	6	12	25	18	5	10	21	11	22	13	26	20	9	19	7	14	29	27	23	15	31	30	28	24	16	
...																																	
2044	32401957	1036862640	0	1	3	7	15	31	30	29	27	23	14	28	25	19	6	13	26	21	10	20	8	17	2	4	9	18	5	11	22	12	24	16	
2045	32401989	1036863664	0	1	3	7	15	31	30	29	27	23	14	28	25	19	6	13	26	21	10	20	9	18	4	8	17	2	5	11	22	12	24	16	
2046	32402008	1036864272	0	1	3	7	15	31	30	29	27	23	14	28	25	19	6	13	26	21	10	20	9	18	5	11	22	12	24	17	2	4	8	16	
2047	32402194	1036870224	0	1	3	7	15	31	30	29	27	23	14	28	25	19	6	13	26	21	11	22	12	24	17	2	4	9	18	5	10	20	8	16	
2048	32402196	1036870288	0	1	3	7	15	31	30	29	27	23	14	28	25	19	6	13	26	21	11	22	12	24	17	2	5	10	20	9	18	4	8	16	

Таблица 6. Последовательности де Брейна при $n_p = 5$

№ m	Бинарные последовательности																																							
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	
2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
...																																								
2044	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	
2045	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	
2046	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	
2047	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	
2048	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	

Из табл. 5 видно, что гамильтоновы циклы, замыкающие семейство, получены при достаточно больших значениях координаты i . Это еще раз подтверждает сложность решения степенных задач, которым свойственны ограничения по физической реализуемости методов с использованием вычислительной техники.

3. Заключение

Метод «ациклического ориентированного дерева» позволяет определять полное семейство бинарных циклических последовательностей де Брейна при заданной разрядности, что создает базу для исследования свойств последовательностей необходимых при обосновании применения последних в качестве основы шкал цифровых датчиков.

Предложенный метод не содержит сложного математического аппарата и поисковые алгоритмы на его основе достаточно легко реализуемы на любом языке программирования. Основным ограничением применения метода является диапазон целочисленных типов данных языка программирования и разрядность процессора ЭВМ.

Литература

- [1] Ожиганов А. А., Захаров И. Д. Применение последовательностей де Брейна для построения псевдорегулярных кодовых шкал // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2012. № 2 (78). С. 69–74.
- [2] Цацин А. А. Гибридный датчик углового положения // *Материалы V научно-практической конференции памяти О. В. Успенского: сб. докладов*. — М.: Изд. дом Академии Н. Е. Жуковского, 2018. С. 22–30.
- [3] Цацин А. А. Гибридный датчик углового положения с динамической коррекцией // *Материалы V научно-практической конференции памяти О. В. Успенского: сб. докладов*. — М.: Изд. дом Академии Н. Е. Жуковского, 2018. С. 31–38.
- [4] Цацин А. А., Перепелицин А. В., Орлов А. И., Фирсов А. М., Калым Н. П. Натурное моделирование гибридного датчика углового положения // *Материалы V научно-*

- практической конференции памяти О. В. Успенского: сб. докладов. — М. : Изд. дом Академии Н. Е. Жуковского, 2018. С. 39–45.
- [5] *Mykkeltveit J., Siu M. K., Tong P.* On the cycle structure of some nonlinear shift register sequence // *Information and control*. 1979. Vol. 43. P. 202–215.
- [6] *Lempel A., Eastman W. L.* High-speed generation of maximal length sequences // *IEEE Transactions on Computers*. 1971. Vol. C-20. No. 2. P. 227–229.
- [7] *Fredricksen H.* A survey of full length nonlinear shift register cede algorithm // *SIAM Review*. 1982. Vol. 24. P. 195–221.
- [8] *Peterson W. W.* Error-correcting codes. — Cambridge: MIT Press, 1961.
- [9] *CoLomb S. W.* Shift register sequences. — San Francisco: Holden Day, 1967.
- [10] *Sin M. K., Tong P.* Generation of some de Bruijn sequences // *J. Discrete Math*. 1980. Vol. 31. No. 1.
- [11] *Chan A. H., Games R. A., Key E. L.* On the complexities of de Bruijn sequences // *J. Comb. Theory. Ser. A*. 1982. Vol. 33. P. 233–246.
- [12] *Хачатрян Л. Г.* Методы построения последовательностей де Брейна // *Дискретная математика*, 1992. Т. 3. № 4. С. 62–78.
- [13] *Abbas M. Alhakim.* A Simple Combinatorial for de Bruijn Sequences // *The American Mathematical Monthly*. 2010. Vol. 117. No. 8. P. 728–732.
- [14] *Цацин А. А.* Метод формирования Т-последовательностей для однокоординатных цифровых датчиков перемещений // *Материалы IV научно-практической конференции памяти О. В. Успенского: сб. докладов.* — М. : Изд. дом Академии Н. Е. Жуковского, 2017. С. 54–60.

Авторы:

Александр Алексеевич Цацин — кандидат технических наук, доцент, главный специалист направления, АО МНПК «Авионика»

Геннадий Александрович Мурашов — заместитель главного конструктора направления, АО МНПК «Авионика»

On the question of finding de Bruijn sequences

A. A. Tsatsin, G. A. Murashov

*Joint Stock Company "Avionica"
7, Obraztsova st., Moscow, Russia, 127055
e-mail: sand_e@mail.ru, wild-mga@yandex.ru*

Abstract. The article contains the main searching method provisions for a complete set of de Bruijn binary sequences at a given bit width of digital position sensor.

Keywords: digital position sensor, de Bruijn binary sequence, cyclic oriented graph, Hamiltonian cycle, acyclic oriented tree.

References

- [1] *Ozhiganov A. A., Zakharov I. D. (2012) Nauchno-tekhnicheskiy vestnik informatsionnykh tekhnologiy, mekhaniki i optiki, 2(78):69–74. [In Rus]*
- [2] *Tsatsin A. A. (2018) Gibridniy datchik uglovogo polozheniya. In Materialy V Nauchno-prakticheskoy konferentsii pamyati O. V. Uspenskogo. Moscow. P. 22–30. [In Rus]*
- [3] *Tsatsin A. A. (2018) Gibridniy datchik uglovogo polozheniya s dinamicheskoy korrektsiyey. In Materialy V Nauchno-prakticheskoy konferentsii pamyati O. V. Uspenskogo. Moscow. P. 31–38. [In Rus]*
- [4] *Tsatsin A. A., Perepelitsin A. V., Orlov A. I., Firsov A. M., Kalyym N. P. (2018) Naturnoe modelirovaniye gibridnogo datchika uglovogo polozheniya. In Materialy V Nauchno-prakticheskoy konferentsii pamyati O. V. Uspenskogo. Moscow. P. 39–45. [In Rus]*
- [5] *Mykkeltveit J., Siu M. K., Tong P. (1979) Information and control, 43:202–215.*
- [6] *Lempel A., Eastman W. L. (1971) IEEE Transactions on Computers, C-20: 227–229.*
- [7] *Fredricksen H. (1982) SIAM Review. 24:195–221.*
- [8] *Peterson W. W. (1961) Error-correcting codes. Cambridge, MIT Press.*
- [9] *CoIomb S. W. (1967) Shift register sequences. San Francisco, Holden Day.*
- [10] *Sin M. K., Tong P. (1980) J. Discrete Math. 31:1.*
- [11] *Chan A. H., Games R. A., Key E. L. (1982) J. Comb. Theory. Ser. A, 33:233–246.*
- [12] *Khachtryan L. G. (1992) Diskretnaya matematika, 3(4):62–78. [In Rus]*
- [13] *Abbas M. Alhakim. (2010) The American Mathematical Monthly, 117(8):728–732.*
- [14] *Tsatsin A. A. (2017) Metod formirovaniya T-posledovatel'nostey dlya odnokoordinatnykh tsifrovyykh datchikov peremesheniy. In Materialy IV Nauchno-prakticheskoy konferentsii pamyati O. V. Uspenskogo. Moscow. P. 54–60. [In Rus]*